

**Kantonale Fachschaft Mathematik**

## **Repetitionsaufgaben: Quadratische Gleichungen**

Zusammengestellt von Felix Huber, KSR

### **Lernziele:**

- Sie können die Lösungen von quadratischen Gleichungen mit der Lösungsformel von Hand bestimmen.
- Sie wissen, welcher Term in der Lösungsformel die Diskriminante ist, kennen ihre Bedeutung für die Anzahl Lösungen einer quadratischen Gleichung und können dieses Wissen in Aufgaben anwenden.
- Sie können verschiedene Typen von quadratischen Gleichungen unterscheiden. Sie können die Lösungen von reinquadratischen und von gemischt-quadratischen Gleichungen sowie von quadratischen Gleichungen mit ganzzahligen Lösungen auch ohne Lösungsformel von Hand bestimmen.
- Sie können biquadratische Gleichungen durch Substitution in quadratische Gleichungen überführen und so sämtliche Lösungen von Hand bestimmen.
- Sie können die Lösungen von einfachen quadratischen Gleichungen mit Parametern von Hand bestimmen.
- Sie können Textaufgaben lösen, die auf quadratische Gleichungen führen.

## Lösungsformel

Die Gleichung

$$a x^2 + b x + c = 0$$

wird im Folgenden als Grundform der quadratischen Gleichung bezeichnet.

Die Lösungen einer quadratischen Gleichung lassen sich mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen bestimmen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Beispiel 1:

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow a = 2, b = -7, c = 3 \quad (\text{Beachten Sie: } b \text{ ist hier negativ})$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3 ; x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Beispiel 2:

$$x^2 = 2x + 1 \quad | \quad -2x - 1 \quad (\text{Gleichung zuerst auf die Grundform bringen})$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = 1, b = -2, c = -1$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{2})}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} \approx 2.4142 ; x_2 = 1 - \sqrt{2} \approx -0.4142$$

Beispiel 3:

$$\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} = 0 \quad | \cdot 12$$

Selbstverständlich könnte man auch mit Brüchen arbeiten ( $a = 1/6$ ,  $b = -5/4$ ,  $c = 3/2$ ). Das führt aber oft zu Fehlern.

Deshalb empfehle ich Ihnen, die Gleichung zuerst mit dem kgV der Nenner zu multiplizieren.

$$2x^2 - 15x + 18 = 0$$

$$\Rightarrow a = 2, b = -15, c = 18$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18}}{2 \cdot 2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 144}}{4} = \frac{15 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{15 \pm 9}{4}$$

$$x_1 = \frac{15 + 9}{4} = \frac{24}{4} = 6 \quad ; \quad x_2 = \frac{15 - 9}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen in den Aufgaben 1 bis 5 mit Hilfe der Lösungsformel. Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

**Aufgabe 1:**  $2x^2 - x - 6 = 0$

**Aufgabe 2:**  $5x^2 - 4 = -8x$

**Aufgabe 3:**  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0$

**Aufgabe 4:**  $-9x^2 - 54x - 63 = 0$

**Aufgabe 5:**  $9y^2 + 9y + 0.25 = 0$

## Diskriminante und Anzahl Lösungen

Beispiel 4:

$$5x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow a = 5, b = -8, c = 4$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4}}{2 \cdot 5} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 80}}{10} = \frac{8 \pm \sqrt{-16}}{10}$$

Die Wurzel aus einer negativen Zahl können wir nicht ziehen. Diese Gleichung hat deshalb keine Lösungen.

Beispiel 5:

$$-x^2 + 70x - 1225 = 0$$

$$\Rightarrow a = -1, b = 70, c = -1225$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1225)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-70 \pm \sqrt{4900 - 4900}}{-2} = \frac{-70 \pm \sqrt{0}}{-2}$$

Die Wurzel aus 0 ist 0. Das hat zur Folge, dass die beiden Lösungen zusammenfallen, dass also die Gleichung genau eine Lösung hat:

$$x_{1,2} = \frac{-70 \pm 0}{-2} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-70}{-2} = 35$$

Fazit: Die Anzahl Lösungen einer quadratischen Gleichung hängen vom Term  $b^2 - 4ac$  unter der Wurzel in der Lösungsformel ab. Dieser Term wird *Diskriminante D* genannt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad D$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$D > 0 \Rightarrow$  2 Lösungen (vgl. Beispiele 1 bis 3)

$D = 0 \Rightarrow$  1 Lösung (vgl. Beispiel 5):  $x_1 = x_2 = x = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$

$D < 0 \Rightarrow$  keine Lösung (vgl. Beispiel 4)

Beispiel 6: Bestimmen Sie mit Hilfe der Diskriminante die Anzahl Lösungen der Gleichung  $2x^2 - x + 3 = 0$ .

Lösung:

$$a = 2, b = -1, c = 3$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 - 24 = -23 < 0 \Rightarrow \text{Keine Lösung}$$

Beispiel 7: Für welche Werte des Parameters  $u$  hat die Gleichung  $x^2 + 2x + 3u = 0$  genau eine Lösung? Wie lautet dann diese Lösung?

Lösung:

$$a = 1, b = 2, c = 3u$$

$$D = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3u = 0 \quad \left| + 12u \right| \quad \left| : 12 \right| \Rightarrow u = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$$

Bestimmen Sie in den Aufgaben 6 bis 8 mit Hilfe der Diskriminante die Anzahl Lösungen:

**Aufgabe 6:**  $4x^2 + 12x + 9 = 0$

**Aufgabe 7:**  $6x^2 - 19x + 15 = 0$

**Aufgabe 8:**  $16x^2 + 25x + 10 = 0$

Bestimmen Sie in den Aufgaben 9 und 10 den Wert des Parameters  $u$  so, dass die Gleichung genau eine Lösung hat. Geben Sie auch die Lösung an.

**Aufgabe 9:**  $2x^2 - 3x + u = 0$

**Aufgabe 10:**  $x^2 + 2ux + 4 = 0$

## Bestimmung der Lösungen von quadratischen Gleichungen ohne Lösungsformel

Oftmals lassen sich die Lösungen von quadratischen Gleichungen ohne Lösungsformel viel unkomplizierter bestimmen, insbesondere wenn  $b = 0$  oder  $c = 0$  ist.

Beispiel 8: Reinquadratische Gleichung 1

$$x^2 - 9 = 0$$

Anstatt mit der Lösungsformel zu arbeiten ( $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = -9$ ) können wir die Lösungen dieser Gleichung viel schneller bestimmen:

$$x^2 - 9 = 0 \quad | + 9$$

$$x^2 = 9 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$|x| = 3 \Rightarrow x_1 = 3, \quad x_2 = -3$$

Die Wurzel aus 9 ist definitionsgemäss nur + 3 (rechte Seite der Gleichung).

$x$  kann jedoch + 3 oder - 3 sein, denn sowohl  $3^2$  als auch  $(-3)^2$  ergeben + 9.

Beispiel 9: Reinquadratische Gleichung 2

$$x^2 + 4 = 0 \quad | - 4$$

$$x^2 = -4 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$|x| = \sqrt{-4} \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

Beispiel 10: Gemischt-quadratische Gleichung

$$4x^2 + 5x = 0$$

Hier ist  $c = 0$ . In diesem Fall können Sie immer  $x$  ausklammern:

$$x(4x + 5) = 0$$

Wir haben nun ein Produkt, das = 0 ist. Ein Produkt ist = 0, wenn einer der Faktoren = 0 ist.

Die Gleichung ist also erfüllt, wenn entweder der 1. Faktor (hier:  $x$ )

oder der 2. Faktor (hier:  $4x + 5$ ) = 0 ist:

1. Fall:  $x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

2. Fall:  $4x + 5 = 0 \quad | -5 \quad | :4 \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{4}$

$\Rightarrow L = \left\{ -\frac{5}{4}, 0 \right\}$

Achtung: Auf gar keinen Fall dürfen Sie die Gleichung durch  $x$  teilen, weil Sie dann die Lösung  $x_1 = 0$  verlieren würden!

Beispiel 11: Bestimmung der Lösungen durch Ausklammern

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

Auch wenn weder  $b = 0$  noch  $c = 0$  ist, lassen sich die Lösungen von quadratischen Gleichungen oft schneller durch Ausklammern bestimmen. Hier:

$$(x - 3)(x - 5) = 0$$

Wie in Beispiel 10 ist die Gleichung erfüllt, wenn einer der Faktoren  $= 0$  ist:

1. Fall:  $x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$

2. Fall:  $x - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$

$\Rightarrow L = \{3, 5\}$

### Aufgabe 11:

Ordnen Sie die Gleichungen in den Aufgaben 12 bis 18 in

- A) Reinquadratische Gleichungen ( $b = 0$ )
- B) Gemischt-quadratische Gleichungen ( $c = 0$ ) und
- C) Andere Gleichungen.

Bestimmen Sie dann die Lösungen der Gleichungen ohne Lösungsformel (Zuerst A, dann B, dann C).

**Aufgabe 12:**  $2x^2 = 5x$

**Aufgabe 13:**  $9x^2 - 4 = 0$

**Aufgabe 14:**  $x^2 - 4x - 21 = 0$

**Aufgabe 15:**  $x^2 + 1 = 0$

**Aufgabe 16:**  $x^2 - 3x = 40$

**Aufgabe 17:**  $-x^2 + 7x = 0$

**Aufgabe 18:**  $(x - 2)(x - 1) = 2$

## Biquadratische Gleichungen

Die Lösungen vieler Gleichungen können nicht ohne weiteres bestimmt werden. Manchmal ist es jedoch möglich, durch eine geeignete *Substitution* die Gleichung in eine quadratische Gleichung zu überführen. Ein wichtiger Gleichungstyp, bei dem dies möglich ist, ist die sogenannte biquadratische Gleichung.

Beispiel 12:

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \quad (\text{biquadratisch: quadratisch in } x^2)$$

Das ist eine Gleichung 4. Grades. Wir können aber  $x^2$  durch die Hilfsvariable  $z$  substituieren:

$$z = x^2 \Rightarrow z^2 - 5z - 36 = 0$$

Jetzt haben wir eine quadratische Gleichung, deren Lösungen wir z.B. mit der Lösungsformel berechnen können (oder: Durch Ausklammern, versuchen Sie es!):

$$z_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2}$$

$$z_1 = \frac{5 + 13}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad ; \quad z_2 = \frac{5 - 13}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$z$  ist aber nur unsere Hilfsvariable. Um  $x$  zu berechnen, müssen wir die Lösungen von  $z$  in die Substitutionsgleichung  $z = x^2$  einsetzen:

$$1) \quad 9 = x^2 \Rightarrow x_1 = 3 \quad ; \quad x_2 = -3$$

$$2) \quad -4 = x^2 \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

$$\Rightarrow L = \{-3, 3\}$$

Eine biquadratische Gleichung kann bis zu 4 Lösungen haben.

Bestimmen Sie in den Aufgaben 19 und 20 sämtliche Lösungen der biquadratischen Gleichungen.

**Aufgabe 19:**  $2x^4 - x^2 - 28 = 0$

**Aufgabe 20:**  $9x^4 + 4 = 37x^2$



## Quadratische Gleichungen mit Parametern

Beispiel 13: Bestimmen Sie den Lösungsterm ohne Diskussion von Sonderfällen ( $x$  ist die Lösungsvariable).

$$x^2 + 3x = ux + 2u + x \quad | \quad - ux - 2u - x \quad (\text{Gleichung auf die Grundform bringen})$$

$$x^2 + 2x - ux - 2u = 0$$

Wir wollen  $a$ ,  $b$  und  $c$  bestimmen und dann die Lösungen mit der Lösungsformel berechnen. Dazu müssen die Summanden, in denen  $x^2$  vorkommt, durch Ausklammern von  $x^2$  zusammengefasst werden. Ebenso müssen die Summanden, in denen  $x$  vorkommt, durch Ausklammern von  $x$  zusammengefasst werden.

Hier: Die beiden Summanden  $2x$  und  $-ux$  enthalten  $x$  und müssen durch ausklammern von  $x$  zusammengefasst werden:

$$x^2 + (2 - u)x - 2u = 0$$

$$\Rightarrow a = 1, b = 2 - u, c = -2u$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(2-u) \pm \sqrt{(2-u)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2u)}}{2 \cdot 1} = \frac{u-2 \pm \sqrt{4-4u+u^2+8u}}{2}$$

Jetzt soll die Diskriminante vereinfacht und falls möglich mit Hilfe der ersten oder zweiten Binomischen Formel faktorisiert werden (damit sich nachher die Wurzel ziehen lässt).

$$x_{1,2} = \frac{u-2 \pm \sqrt{4+4u+u^2}}{2} = \frac{u-2 \pm \sqrt{(2+u)^2}}{2} = \frac{u-2 \pm (2+u)}{2}$$

$$x_1 = \frac{u-2+2+u}{2} = \frac{2u}{2} = u; \quad x_2 = \frac{u-2-(2+u)}{2} = \frac{u-2-2-u}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Bestimmen Sie in den Aufgaben 21 und 22 den Lösungsterm ohne Diskussion von Sonderfällen ( $x$  ist die Lösungsvariable).

**Aufgabe 21:**  $x^2 - ux + u = x$

**Aufgabe 22:**  $x^2 - ux - u = 1$

## Textaufgaben

Beispiel 14: Von zwei Zahlen ist die eine um 50 grösser als die andere und das Produkt um 50 grösser als die Summe. Bestimmen Sie die beiden Zahlen.

Lösung:

1. Schritt : Variable(n) deklarieren

$x$  : Kleinere Zahl  $\Rightarrow$  Grössere Zahl :  $x + 50$

2. Schritt : Gleichung aufstellen:

Da das Produkt um 50 grösser ist als die Summe, muss zur Summe 50 addiert werden, um auf das gleiche Ergebnis zu kommen:

$$\text{Produkt} = \text{Summe} + 50 \Rightarrow x(x + 50) = x + x + 50 + 50$$

3. Schritt: Gleichung lösen

$$x^2 + 50x = 2x + 100 \Rightarrow x^2 + 48x - 100 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 50) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -50$$

4. Schritt: Antwortsatz

Die beiden Zahlen lauten 2 und 52 oder  $-50$  und  $0$ .

Beispiel 15: Ein Blumenbeet von 3 m Länge und 2 m Breite ist ringsum mit konstanter Breite von Rasen eingefasst, so dass Einfassung und Beet gleichen Flächeninhalt haben. Wie breit ist die Einfassung?

Lösung:

$x$  : Breite der Einfassung

$$\text{Fläche Beet} = \text{Fläche Einfassung} \Rightarrow \text{Länge} \cdot \text{Breite} = 2 \cdot \text{Länge} \cdot x + 2 \cdot \text{Breite} \cdot x + 4x^2$$

Hinweis : Machen Sie eine Skizze!

$$\Rightarrow 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot x + 2 \cdot 2 \cdot x + 4x^2 \Rightarrow 6 = 6x + 4x + 4x^2 \Rightarrow 0 = 4x^2 + 10x - 6$$

$$\Rightarrow 0 = 2x^2 + 5x - 3$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

Die Einfassung ist 0.5 m breit.

Beispiel 16: Ein Mensch beginnt ein Geschäft mit Fr. 2000.-. Den Gewinn des ersten Jahres schlägt er voll zum Kapital. Im zweiten Jahr gewinnt er den gleich hohen Prozentsatz, wodurch das Kapital auf Fr. 2645.- anwächst. Wie viele Prozente hat er jedes Jahr gewonnen?

Lösung:

$x$  : Prozentsatz

$$\text{Kapital nach dem ersten Jahr : } K_1 = 2000 + 2000 \cdot \frac{x}{100} = 2000 + 20x$$

$$\text{Kapital nach dem zweiten Jahr : } K_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{x}{100} = 2000 + 20x + (2000 + 20x) \cdot \frac{x}{100}$$

$$\Rightarrow 2645 = 2000 + 20x + (2000 + 20x) \cdot \frac{x}{100} \Rightarrow 2645 = 2000 + 20x + 20x + 0.2x^2$$

$$\Rightarrow 0 = 0.2x^2 + 40x - 645 \Rightarrow 0 = x^2 + 200x - 3225$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-200 \pm \sqrt{200^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3225)}}{2 \cdot 1} = \frac{-200 \pm \sqrt{40000 + 12900}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-200 \pm \sqrt{52900}}{2} = \frac{-200 \pm 230}{2}$$

$$x_1 = \frac{-200 + 230}{2} = \frac{30}{2} = 15 \quad ; \quad x_2 = \frac{-200 - 230}{2} = \frac{-430}{2} = -215$$

Er hat jährlich 15 % gewonnen.

### Aufgabe 23:

Das um 100 verminderte Quadrat einer gesuchten Zahl übertrifft die Zahl 200 um so viel, wie die gesuchte Zahl unter 300 liegt.

### Aufgabe 24:

Die Grundlinie eines Dreiecks von 3.6 m<sup>2</sup> Flächeninhalt ist um 11.4 m länger als die zugehörige Höhe. Berechnen Sie die Grundlinie.

### Aufgabe 25:

Eine Baumaschine mit einem Anschaffungswert von Fr. 24000.- wurde zweimal mit dem gleichen Prozentsatz abgeschrieben und hat zur Zeit einen Wert von Fr. 16335.-. Wie viele Prozente beträgt der Abschreibungssatz?

## Lösungen

### Aufgabe 1

$$2x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow a = 2, b = -1, c = -6$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{1+7}{4} = \frac{8}{4} = 2 ; x_2 = \frac{1-7}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

### Aufgabe 2

$$5x^2 - 4 = -8x \quad | +8x$$

$$5x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow a = 5, b = 8, c = -4$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 5} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{10} = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{10} = \frac{-8 \pm 12}{10}$$

$$x_1 = \frac{-8+12}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} ; x_2 = \frac{-8-12}{10} = \frac{-20}{10} = -2$$

### Aufgabe 3

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0 \quad | \cdot 6$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = 3, b = -2, c = -1$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$x_1 = \frac{2+4}{6} = \frac{6}{6} = 1 ; x_2 = \frac{2-4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

#### Aufgabe 4

$$-9x^2 - 54x - 63 = 0 \quad | :(-9)$$

Empfehlung: Schauen Sie immer zuerst, ob sich die Gleichung vereinfachen lässt.

$$x^2 + 6x + 7 = 0$$

$$\Rightarrow a = 1, b = 6, c = 7$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(-3 \pm \sqrt{2})}{2} = -3 \pm \sqrt{2}$$

$$x_1 = -3 + \sqrt{2} \approx -1.586 \quad ; \quad x_2 = -3 - \sqrt{2} \approx -4.141$$

#### Aufgabe 5

$$9y^2 + 9y + 0.25 = 0$$

$$\Rightarrow a = 9, b = 9, c = 0.25$$

Natürlich könnten wir die Gleichung auch mit 4 multiplizieren. In der Lösungsformel wird c aber ohnehin mit 4 multipliziert, so dass wir uns die grossen Zahlen sparen können.

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 9 \cdot 0.25}}{2 \cdot 9} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 9}}{18} = \frac{-9 \pm \sqrt{72}}{18}$$

$$y_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{36 \cdot 2}}{18} = \frac{-9 \pm 6\sqrt{2}}{18} = \frac{3(-3 \pm 2\sqrt{2})}{18} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{6}$$

$$y_1 = \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{6} \approx -0.0286 \quad ; \quad y_2 = \frac{-3 - 2\sqrt{2}}{6} \approx -0.9714$$

#### Aufgabe 6

$$a = 4, b = 12, c = 9$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0 \Rightarrow 1 \text{ Lösung}$$

### Aufgabe 7

$$a = 6, b = -19, c = 15$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-19)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 15 = 361 - 360 = 1 > 0 \Rightarrow 2 \text{ Lösungen}$$

### Aufgabe 8

$$a = 16, b = 25, c = 10$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 25^2 - 4 \cdot 16 \cdot 10 = 625 - 640 = -15 < 0 \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

### Aufgabe 9

$$a = 2, b = -3, c = u$$

$$D = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot u = 0 \quad \left| + 8u \right| : 8 \Rightarrow u = \frac{9}{8}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$$

### Aufgabe 10

$$a = 1, b = 2u, c = 4$$

$$D = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(2u)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow 4u^2 = 16 \Rightarrow u^2 = 4 \quad \left| \sqrt{\quad} \right.$$

$$|u| = 2 \quad (\text{vgl. nächster Abschnitt})$$

$$u = \pm 2$$

Wenn  $u = 2$  ist hat die Gleichung genau eine Lösung,

und wenn  $u = -2$  ist hat die Gleichung auch genau eine Lösung:

$$u = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow \text{Die einzige Lösung lautet } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$$

$$u = -2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow \text{Die einzige Lösung lautet } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$$

### Aufgabe 11

A) 13, 15      B) 12, 17, 18 (!)      C) 14, 16

### Aufgabe 13

$$9x^2 - 4 = 0 \quad | +4 \quad | :9 \quad | \sqrt{\quad} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = -\frac{2}{3}$$

### Aufgabe 15

$$x^2 + 1 = 0 \quad | -1 \quad | \sqrt{\quad} \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

### Aufgabe 12

$$2x^2 = 5x \quad | -5x$$

$$2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(2x - 5) = 0$$

$$1. \text{ Fall: } x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$2. \text{ Fall: } 2x - 5 = 0 \quad | +5 \quad | :2 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow L = \left\{ 0, \frac{5}{2} \right\}$$

### Aufgabe 17

$$-x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(7 - x) = 0$$

$$1. \text{ Fall: } x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$2. \text{ Fall: } 7 - x = 0 \quad | +x \Rightarrow x_2 = 7$$

$$\Rightarrow L = \{0, 7\}$$

### Aufgabe 18

$$(x - 2)(x - 1) = 2$$

Achtung: Auf der rechten Seite steht nicht 0. Deshalb muss das Produkt ausgerechnet werden.

$$x^2 - 3x + 2 = 2 \quad | -2 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \text{Gemischt-quadratische Gleichung}$$

$$\Rightarrow x(x - 3) = 0$$

$$1. \text{ Fall: } x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$2. \text{ Fall: } x - 3 = 0 \quad | +3 \Rightarrow x_2 = 3$$

$$\Rightarrow L = \{0, 3\}$$

### Aufgabe 14

$$x^2 - 4x - 21 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 7) = 0$$

$$1. \text{ Fall: } x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$$

$$2. \text{ Fall: } x - 7 = 0 \Rightarrow x_2 = 7$$

$$\Rightarrow L = \{-3, 7\}$$

### Aufgabe 16

$$x^2 - 3x = 40 \quad | -40 \Rightarrow x^2 - 3x - 40 = 0 \Rightarrow (x + 5)(x - 8) = 0$$

$$1. \text{ Fall: } x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -5$$

$$2. \text{ Fall: } x - 8 = 0 \Rightarrow x_2 = 8$$

$$\Rightarrow L = \{-5, 8\}$$

### Aufgabe 19

$$2x^4 - x^2 - 28 = 0$$

$$z = x^2 \Rightarrow 2z^2 - z - 28 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-28)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 224}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{225}}{4} = \frac{1 \pm 15}{4}$$

$$z_1 = \frac{1 + 15}{4} = \frac{16}{4} = 4 \quad ; \quad z_2 = \frac{1 - 15}{4} = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2}$$

$$1) \quad 4 = x^2 \Rightarrow x_1 = 2 \quad ; \quad x_2 = -2$$

$$2) \quad -\frac{7}{2} = x^2 \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

$$\Rightarrow L = \{-2, 2\}$$



## Aufgabe 20

$$9x^4 + 4 = 37x^2 \Rightarrow 9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$$

$$z = x^2 \Rightarrow 9z^2 - 37z + 4 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-37) \pm \sqrt{(-37)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{2 \cdot 9} = \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 144}}{18} = \frac{37 \pm \sqrt{1225}}{18} = \frac{37 \pm 35}{18}$$

$$z_1 = \frac{37 + 35}{18} = \frac{72}{18} = 4 ; z_2 = \frac{37 - 35}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

$$1) 4 = x^2 \Rightarrow x_1 = 2 ; x_2 = -2$$

$$2) \frac{1}{9} = x^2 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{3} ; x_4 = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow L = \left\{ -2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 2 \right\}$$

## Aufgabe 21

$$x^2 - ux + u = x \quad | -x$$

$$x^2 - ux - x + u = 0$$

$$x^2 - (u+1)x + u = 0$$

$$\Rightarrow a = 1, b = -(u+1) = -u-1, c = u$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-u-1) \pm \sqrt{(-u-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot u}}{2 \cdot 1} = \frac{u+1 \pm \sqrt{u^2 + 2u + 1 - 4u}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{u+1 \pm \sqrt{u^2 - 2u + 1}}{2} = \frac{u+1 \pm \sqrt{(u-1)^2}}{2} = \frac{u+1 \pm (u-1)}{2}$$

$$x_1 = \frac{u+1+u-1}{2} = \frac{2u}{2} = u ; x_2 = \frac{u+1-(u-1)}{2} = \frac{u+1-u+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

### Aufgabe 22

$$x^2 - u x - u = 1 \quad | -1$$

$$x^2 - u x - u - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = 1, b = -u, c = -u - 1$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-u) \pm \sqrt{(-u)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-u - 1)}}{2 \cdot 1} = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 4u + 4}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{(u+2)^2}}{2} = \frac{u \pm (u+2)}{2}$$

$$x_1 = \frac{u + u + 2}{2} = \frac{2u + 2}{2} = \frac{2(u+1)}{2} = u + 1 ; \quad x_2 = \frac{u - (u+2)}{2} = \frac{u - u - 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

### Aufgabe 23

x : gesuchte Zahl

Das um 100 verminderte Quadrat der gesuchten Zahl:  $x^2 - 100$

$$\Rightarrow x^2 - 100 - 200 = 300 - x \Rightarrow x^2 + x - 600 = 0 \Rightarrow 0 = (x + 25)(x - 24)$$

$$\Rightarrow x_1 = -25 ; \quad x_2 = 24$$

Die gesuchte Zahl ist -25 oder 24.

## Aufgabe 24

$x$  : Grundlinie  $\Rightarrow$  Höhe :  $x - 11.4$

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{\text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}}{2} \Rightarrow 3.6 = \frac{x(x - 11.4)}{2} \Rightarrow 7.2 = x(x - 11.4)$$

$$\Rightarrow 7.2 = x^2 - 11.4x \Rightarrow 36 = 5x^2 - 57x \Rightarrow 0 = 5x^2 - 57x - 36$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-57) \pm \sqrt{(-57)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-36)}}{2 \cdot 5} = \frac{57 \pm \sqrt{3249 + 720}}{10}$$

$$x_{1,2} = \frac{57 \pm \sqrt{3969}}{10} = \frac{57 \pm 63}{10}$$

$$x_1 = \frac{57 + 63}{10} = \frac{120}{10} = 12 ; x_2 = \frac{57 - 63}{10} = \frac{-6}{10} = -0.6$$

Die Grundlinie ist 12 m lang.

## Aufgabe 25

$x$  : Abschreibungsatz

$$\text{Wert nach 1. Abschreibung: } W_1 = 24000 - 24000 \cdot \frac{x}{100} = 24000 - 240x$$

$$\text{Wert nach 2. Abschreibung: } W_2 = W_1 - W_1 \cdot \frac{x}{100} = 24000 - 240x - (24000 - 240x) \cdot \frac{x}{100}$$

$$\Rightarrow 16335 = 24000 - 240x - (24000 - 240x) \cdot \frac{x}{100}$$

$$\Rightarrow 16335 = 24000 - 240x - 240x + 2.4x^2 \Rightarrow 2.4x^2 - 480x + 7665 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-480) \pm \sqrt{(-480)^2 - 4 \cdot 2.4 \cdot 7665}}{2 \cdot 2.4} = \frac{480 \pm \sqrt{230400 - 73584}}{4.8}$$

$$x_{1,2} = \frac{480 \pm \sqrt{156816}}{4.8} = \frac{480 \pm 396}{4.8}$$

$$x_1 = \frac{480 + 396}{4.8} = \frac{876}{4.8} = 182.5 ; x_2 = \frac{480 - 396}{4.8} = \frac{84}{4.8} = 17.5$$

Der Abschreibungsatz beträgt 17.5 %.