

Repetitionsaufgaben Termumformungen

Zusammengestellt von der Fachschaft Mathematik der Kantonsschule Willisau

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|----|
| A) Vorbemerkung | 1 |
| B) Lernziele..... | 1 |
| C) Theorie „Termumformungen 1“: Grundlagen und Ausmultiplizieren..... | 2 |
| D) Aufgaben „Termumformungen 1“ | 4 |
| E) Musterlösungen „Termumformungen 1“ | 5 |
| F) Theorie „Termumformungen 2“: Faktorisieren | 8 |
| G) Aufgaben „Termumformungen 2“ | 10 |
| H) Musterlösungen „Termumformungen 2“ | 11 |

A) Vorbemerkung

Als Voraussetzung für einige dieser Repetitionsaufgaben sind folgende Repetitionsaufgaben zwingend:

- Negative Zahlen/Brüche/Prozentrechnen, v.a. die Teile über Negative Zahlen und Brüche

B) Lernziele

- Terme korrekt umformen können
- Gesetzmässigkeiten kennen
- Terme faktorisieren können und verschiedene Methoden dazu kennen

C) Theorie „Termumformungen 1“: Grundlagen und Ausmultiplizieren

- Wenn zwischen zwei Objekten ein **Operationszeichen fehlt**, so handelt es sich um ein **weggelassenes Multiplikationszeichen**:

$$ab = a \cdot b$$

$$a(b + c) = a \cdot (b + c)$$

$$(x + y)(x - y) = (x + y) \cdot (x - y)$$

- Für die **Addition** gelten die folgenden Gesetze:

Kommutativgesetz: $a + b = b + a$

Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$

Die Addition hat das **neutrale Element 0**, das heisst $a + 0 = 0 + a = a$.

Für die **Multiplikation** gelten die folgenden Gesetze:

Kommutativgesetz: $ab = ba$

Assoziativgesetz: $(ab)c = a(bc) = abc$

Die Multiplikation hat das **neutrale Element 1**, das heisst $a \cdot 1 = 1a = a$.

Für **Subtraktion** und **Division** gelten **keine solchen Gesetze**, z.B. $a - b \neq b - a$.

- Für die Rechenoperationen gilt die folgende **Reihenfolge**:

Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich.

Beispiele: a) $3 + 4 \cdot 5 = 3 + 20 = 23$

b) $(3 + 4) \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35$

c) $3 \cdot 4^2 - (3 \cdot 4)^2 - 3^2 + (-3)^2 = 3 \cdot 16 - 12^2 - 9 + 9 = 48 - 144 = -96$

d) $(ab)^2 + ab \cdot b + a^2b^2 = a^2b^2 + ab^2 + a^2b^2 = 2a^2b^2 + ab^2$

- Es gelten die **Distributivgesetze**:

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b) : c = a : c + b : c \quad \left(\text{gleichbedeutend mit } \frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right)$$

- Für **Klammern der Addition/Subtraktion** gelten folgende Regeln:

$a + (b + c) = a + b + c$
 $a + (b - c) = a + b - c \Rightarrow$ **Plus-Klammern** dürfen **weggelassen** werden.

$a - (b + c) = a - b - c$
 $a - (b - c) = a - b + c \Rightarrow$ Werden **Minus-Klammern** **weggelassen**, müssen alle **Operationszeichen** in der Klammer **umgedreht** werden.

- Für **Klammern der Multiplikation/Division** gelten analoge Regeln:

$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
 $a \cdot (b : c) = a \cdot b : c \Rightarrow$ **Mal-Klammern** dürfen **weggelassen** werden.

$a : (b \cdot c) = a : b : c$
 $a : (b : c) = a : b \cdot c \Rightarrow$ Werden **Geteilt-durch-Klammern** **weggelassen**, müssen alle **Operationszeichen** in der Klammer **umgedreht** werden.

- Für **Produkte von Summen** gelten die folgenden Rechenregeln:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bc$$

$$(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$$

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

Es wird **jeder Summand der 1. Klammer** mit **jedem Summanden der 2. Klammer** multipliziert, wobei jeweils die zugehörigen **Vorzeichen** beachtet werden müssen.

- Es gelten (als Abkürzung zu den vorangehenden Regeln über Produkte von Summen) die folgenden binomischen Formeln:

1. binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. binomische Formel: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

- Zur Wiederholung sind hier einige einfache Termumformungen zusammengestellt, welche als **grundlegende Beispiele** dienen sollen:

a) $a + b = a + b$ (kann nicht zusammengefasst werden)

b) $a + a = 2a$

c) $2a + 3a = 5a$

d) $a \cdot b = ab$

e) $a \cdot a = a^2$ (Hinweis: Vergleichen Sie mit b)!)

f) $2a \cdot 3a = 6a^2$

g) $0 \cdot a = 0$

h) $1 \cdot a = a$

i) $a : a = 1$

j) $2a : a = 2$

k) $a^3 : a = a^2$

l) $(ab)^2 = a^2b^2$

D) Aufgaben „Termumformungen 1“

1. Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich:

- | | | |
|-------------------------------|---------------------------|---|
| a) $8a + 4a$ | b) $8a \cdot 4a$ | c) $6x - 14x$ |
| d) $6x : 14x$ | e) $7x + (4x - 3)$ | f) $-14m - (21m + 15)$ |
| g) $6z - (3z - 6) + (7 - 8z)$ | h) $3a - [4 - (2a - 7)]$ | i) $(-2a)(-3b)$ |
| j) $(-3xy)(-5z)(-2)$ | k) $u^5v^4(-uv)^3$ | l) $a^3bc^2(-ab^3)^2 \cdot 5ac^3$ |
| m) $-3(a + b)$ | n) $5(4a - 7b) + 3a$ | o) $(-9)(r - 4s)$ |
| p) $(-6a^3) : (-3a)$ | q) $24mn^2 : (-8n^2)$ | r) $-\frac{12}{5}ab^3c^2 : \left(\frac{4}{15}ab^2\right)$ |
| s) $(26a - 65b) : (-13)$ | t) $(8e + 12f - 10g) : 2$ | u) $(ax^5 - bx^3) : (-x^3)$ |
| v) $30a : (2a : 5)$ | w) $4x \cdot (y \cdot x)$ | x) $2(6rs + 4rt)$ |

2. Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich:

- a) $2x - 7y - 21z - 13x + 4y - 17z$
b) $(-3a - b + c) - (6a - 3b + 2c)$
c) $17x - (43y + 6z) + [-(48x - 53z) + 4y]$
d) $3(2a - b) - 2(4a + 3b)$
e) $4(6x - 5) - 2(3x - 7)$
f) $5a^2(4a^3 - 1) + a^4(a - 2)$
g) $-3x(5x^2 - 3) + (-2x^2)(5x - 1)$
h) $[-3(a + b)^3 + 2(a + b)^2] : (a + b)$
i) $\left(-\frac{3x^2}{2} + \frac{4x^4}{3} + 2x^3\right) : \left(-\frac{7x^2}{2}\right)$

3. Berechnen Sie die folgenden Produkte von Summen:

- | | | |
|-----------------------|------------------------|-------------------------|
| a) $(x - y)(m + n)$ | b) $(t - 2f)(3t + 5f)$ | c) $(ty + n)(5ty - 3n)$ |
| d) $(2b + 3)(5c + 8)$ | e) $(m^5 - 2)(3 - 2m)$ | f) $(ax - b)(3ax + 5b)$ |

4. Berechnen Sie mithilfe der binomischen Formeln:

- | | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|------------------------------|
| a) $(r + s)^2$ | b) $(r - s)^2$ | c) $(x + y)(x - y)$ |
| d) $(7c - 3d)^2$ | e) $(m^5 + 2)^2$ | f) $(10u + 12v)(10u - 12v)$ |
| g) $(4x^2 - 3y^2)(4x^2 - 3y^2)$ | h) $(a + b)^2 - (a - b)^2$ | i) $(3x - 5)^2 - (5 - 3x)^2$ |
| j) $(a^3 - 1)(a^3 + 1)$ | k) $3(3u + 2)^2 + (8u - 3)(1 - 4u)$ | |
| l) $3x(5x - 8) - (4x - 3)^2$ | m) $a^2z^2 - (az - 1)^2 + 2(3 - az)$ | |

E) Musterlösungen „Termumformungen 1“

1. a) $8a + 4a = 12a$
(Terme mit gleichen Variablen dürfen zusammengefasst werden.)
- b) $8a \cdot 4a = 8 \cdot 4 \cdot a \cdot a = 32a^2$
(Assoziativ- und Kommutativgesetz der Multiplikation)
- c) $6x - 14x = -8x$
- d) $6x : 14x = \frac{6x}{14x} = \frac{3}{7}$
(kürzen mit $2x$)
- e) $7x + (4x - 3) = 7x + 4x - 3 = 11x - 3$
(Plus-Klammer weglassen. Terme mit Variablen und solche ohne Variablen können nicht zusammengefasst werden.)
- f) $-14m - (21m + 15) = -14m - 21m - 15 = -35m - 15$
(Operationszeichen umdrehen, wenn Minus-Klammer weggelassen wird.)
- g) $6z - (3z - 6) + (7 - 8z) = 6z - 3z + 6 + 7 - 8z = -5z + 13$ (Plus- bzw. Minus-Klammer)
- h) $3a - [4 - (2a - 7)] = 3a - [4 - 2a + 7] = 3a - 4 + 2a - 7 = 5a - 11$
(Klammern von innen nach aussen auflösen, Minus-Klammern)
- i) $(-2a)(-3b) = (-2a) \cdot (-3b) = (-2) \cdot (-3) \cdot a \cdot b = 6ab$
- j) $(-3xy)(-5z)(-2) = (-3xy) \cdot (-5z) \cdot (-2) = -3 \cdot (-5) \cdot (-2) \cdot x \cdot y \cdot z = -30xyz$
- k) $u^5v^4(-uv)^3 = u^5v^4 \cdot (-uv)^3 = u^5v^4 \cdot (-uv)(-uv)(-uv) = u^5v^4 \cdot (-u^3v^3) = -u^8v^7$
- l) $a^3bc^2(-ab^3)^2 \cdot 5ac^3 = a^3bc^2 \cdot (-ab^3)^2 \cdot 5ac^3 = a^3bc^2 \cdot (-ab^3)(-ab^3) \cdot 5ac^3$
 $= a^3bc^2 \cdot a^2b^6 \cdot 5ac^3 = 5a^6b^7c^5$
- m) $-3(a + b) = -3a + (-3)b = -3a - 3b$
(Distributivgesetz)
- n) $5(4a - 7b) + 3a = 20a - 35b + 3a = 23a - 35b$
(Distributivgesetz)
- o) $(-9)(r - 4s) = -9r - (-9) \cdot 4s = -9r + 36s$
(Distributivgesetz)
- p) $(-6a^3) : (-3a) = (-6 \cdot a^3) : (-3 \cdot a) = -6 \cdot a^3 : (-3) : a = -6 : (-3) \cdot a^3 : a = 2 \cdot a^2$
 $= 2a^2$
(Geteilt-durch-Klammer; andere Sichtweise: Zahlen durcheinander dividieren, Variablen durcheinander dividieren, danach Resultate multiplizieren)
- q) $24mn^2 : (-8n^2) = 24 : (-8) \cdot mn^2 : n^2 = -3 \cdot m = -3m$
(wie p))
- r) $-\frac{12}{5}ab^3c^2 : \left(\frac{4}{15}ab^2\right) = -\frac{12}{5} : \frac{4}{15} \cdot ab^3c^2 : ab^2 = -\frac{12}{5} \cdot \frac{15}{4} \cdot bc^2 = -\frac{9}{1}bc^2 = -9bc^2$
(wie p); Division von Brüchen durch Multiplikation mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs; zweimal kürzen mit 3, Eintel als ganze Zahl (ohne Bruchstrich) notieren)
- s) $(26a - 65b) : (-13) = 26a : (-13) - 65b : (-13) = -2a - (-5b) = -2a + 5b$
(Distributivgesetz)
- t) $(8e + 12f - 10g) : 2 = 8e : 2 + 12f : 2 - 10g : 2 = 4e + 6f - 5g$
(Distributivgesetz)
- u) $(ax^5 - bx^3) : (-x^3) = ax^5 : (-x^3) - bx^3 : (-x^3) = -ax^2 - (-b) = -ax^2 + b$
(Distributivgesetz)
- v) $30a : (2a : 5) = 30a : 2a \cdot 5 = 15 \cdot 5 = 75$
(Operationszeichen umdrehen, wenn Geteilt-durch-Klammer weggelassen wird.)

w) $4x \cdot (y \cdot x) = 4x \cdot y \cdot x = 4xy \cdot x = 4x^2y$

(Mal-Klammer weglassen)

x) $2(6rs + 4rt) = 12rs + 8rt$

(Distributivgesetz)

2. a) $2x - 7y - 21z - 13x + 4y - 17z = 2x - 13x - 7y + 4y - 21z - 17z = -11x - 3y - 38z$
(Terme mit gleichen Variablen dürfen zusammengefasst werden.)
- b) $(-3a - b + c) - (6a - 3b + 2c) = -3a - b + c - 6a + 3b - 2c = -9a + 2b - c$
(Vordere Klammer kann als Plus-Klammer behandelt und somit weggelassen werden. Operationszeichen umdrehen, wenn Minus-Klammer weggelassen wird.)
- c) $17x - (43y + 6z) + [-(48x - 53z) + 4y] = 17x - 43y - 6z + [-48x + 53z + 4y]$
 $= 17x - 43y - 6z - 48x + 53z + 4y = -31x - 39y + 47z$
(zwei Minus-Klammern und eine Plus-Klammer)
- d) $3(2a - b) - 2(4a + 3b) = 6a - 3b - (8a + 6b) = 6a - 3b - 8a - 6b = -2a - 9b$
(Distributivgesetz; Vorsicht bei hinterer Klammer, die nach dem Ausrechnen mit dem Distributivgesetz erneut hingeschrieben werden muss, da es sich um eine Minus-Klammer handelt.)
- e) $4(6x - 5) - 2(3x - 7) = 24x - 20 - (6x - 14) = 24x - 20 - 6x + 14 = 18x - 6$
(wie d))
- f) $5a^2(4a^3 - 1) + a^4(a - 2) = 20a^5 - 5a^2 + a^5 - 2a^4 = 21a^5 - 2a^4 - 5a^2$
(Hier kann hintere Klammer nach dem Ausrechnen mit dem Distributivgesetz weggelassen werden, da es sich um eine Plus-Klammer handelt.)
- g) $-3x(5x^2 - 3) + (-2x^2)(5x - 1) = -15x^3 + 9x + (-10x^3 + 2x^2)$
 $= -15x^3 + 9x - 10x^3 + 2x^2 = -25x^3 + 2x^2 + 9x$
(wie f))
- h) $[-3(a + b)^3 + 2(a + b)^2] : (a + b) = -3(a + b)^3 : (a + b) + 2(a + b)^2 : (a + b)$
 $= -3(a + b)^2 + 2(a + b) = -3(a^2 + 2ab + b^2) + 2a + 2b = -3a^2 - 6ab - 3b^2 + 2a + 2b$
(Distributivgesetz mehrfach, zudem 1. binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$)
- i) $\left(-\frac{3x^2}{2} + \frac{4x^4}{3} + 2x^3\right) : \left(-\frac{7x^2}{2}\right) = \left(-\frac{3x^2}{2} + \frac{4x^4}{3} + 2x^3\right) \cdot \left(-\frac{2}{7x^2}\right)$
 $= -\frac{3x^2}{2} \cdot \left(-\frac{2}{7x^2}\right) + \frac{4x^4}{3} \cdot \left(-\frac{2}{7x^2}\right) + 2x^3 \cdot \left(-\frac{2}{7x^2}\right) = \frac{6x^2}{14x^2} - \frac{8x^4}{21x^2} - \frac{4x^3}{7x^2} = \frac{3}{7} - \frac{8x^2}{21} - \frac{4x}{7}$
 $= \frac{9}{21} - \frac{8x^2}{21} - \frac{12x}{21} = \frac{-8x^2 - 12x + 9}{21}$
(Division von Brüchen durch Multiplikation mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs; Distributivgesetz; Bruchmultiplikation; Kürzen; Brüche gleichnennrig machen, um Subtraktionen durchführen zu können)
3. a) $(x - y)(m + n) = mx + nx - my - ny$
- b) $(t - 2f)(3t + 5f) = 3t^2 + 5ft - 6ft - 10f^2 = 3t^2 - ft - 10f^2$
- c) $(ty + n)(5ty - 3n)5 = t^2y^2 - 3nty + 5nty - 3n^2 = 5t^2y^2 + 2nty - 3n^2$
- d) $(2b + 3)(5c + 8) = 10bc + 16b + 15c + 24$
- e) $(m^5 - 2)(3 - 2m) = 3m^5 - 2m^6 - 6 + 4m$
- f) $(ax - b)(3ax + 5b) = 3a^2x^2 + 5abx - 3abx - 5b^2 = 3a^2x^2 + 2abx - 5b^2$

4. a) $(r + s)^2 = r^2 + 2rs + s^2$
(1. binomische Formel)
- b) $(r - s)^2 = r^2 - 2rs + s^2$
(2. binomische Formel)
- c) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
(3. binomische Formel)
- d) $(7c - 3d)^2 = (7c)^2 - 2 \cdot 7c \cdot 3d + (3d)^2 = 49c^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot c \cdot d + 9d^2 = 49c^2 - 42cd + 9d^2$
(2. binomische Formel, wobei die Multiplikation im mittleren Glied ausführlich vorgeführt wird)
- e) $(m^5 + 2)^2 = (m^5)^2 + 2 \cdot m^5 \cdot 2 + 2^2 = m^{10} + 4m^5 + 4$
(1. binomische Formel)
- f) $(10u + 12v)(10u - 12v) = (10u)^2 - (12v)^2 = 100u^2 - 144v^2$
(3. binomische Formel)
- g) $(4x^2 - 3y^2)(4x^2 - 3y^2) = (4x^2 - 3y^2)^2 = (4x^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 \cdot 3y^2 + (3y^2)^2$
 $= 16x^4 - 24x^2y^2 + 9y^4$
(2. binomische Formel)
- h) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$
 $= 4ab$
(vorne 1. binomische Formel, hinten 2. binomische Formel, Minus-Klammer beim hinteren Teil zwingend)
- i) $(3x - 5)^2 - (5 - 3x)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 5 + 25 - (25 - 2 \cdot 5 \cdot 3x + (3x)^2)$
 $= 9x^2 - 30x + 25 - 25 + 30x - 9x^2 = 0$
(zweimal 2. binomische Formel, Minus-Klammer beim hinteren Teil zwingend)
- j) $(a^3 - 1)(a^3 + 1) = (a^3)^2 - 1 = a^6 - 1$
(3. binomische Formel)
- k) $3(3u + 2)^2 + (8u - 3)(1 - 4u) = 3((3u)^2 + 2 \cdot 3u \cdot 2 + 4) + 8u - 32u^2 - 3 + 12u$
 $= 3(9u^2 + 12u + 4) + 20u - 32u^2 - 3 = 27u^2 + 36u + 12 + 20u - 32u^2 - 3$
 $= -5u^2 + 56u + 9$
(vorne 2. binomische Formel und Distributivgesetz; hinten Produkt von Summen)
- l) $3x(5x - 8) - (4x - 3)^2 = 15x^2 - 24x - ((4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3 + 3^2)$
 $= 15x^2 - 24x - (16x^2 - 24x + 9) = 15x^2 - 24x - 16x^2 + 24x - 9 = -x^2 - 9$
(vorne Distributivgesetz; hinten 2. binomische Formel, die aber infolge Minus-Klammer weiterhin eingeklammert werden muss)
- m) $a^2z^2 - (az - 1)^2 + 2(3 - az) = a^2z^2 - ((az)^2 - 2 \cdot az \cdot 1 + 1) + 6 - 2az$
 $= a^2z^2 - (a^2z^2 - 2az + 1) + 6 - 2az = a^2z^2 - a^2z^2 + 2az - 1 + 6 - 2az = 5$
(in der Mitte 2. binomische Formel, die aber infolge Minus-Klammer weiterhin eingeklammert werden muss; hinten Distributivgesetz)

F) Theorie „Termumformungen 2“: Faktorisieren

- Beim **Faktorisieren** geht es darum, Terme **so weit wie möglich in Faktoren zu zerlegen**. Dazu gibt es verschiedene mögliche Schritte, welche im Folgenden erläutert werden. Es empfiehlt sich, bei einer Aufgabe die **Schritte von oben nach unten durchzugehen** und auszuführen versuchen.

Zahlen sind in den Resultaten an den Anfang zu stellen.

- **1. Schritt: Ausklammern**

Wenn in einer Summe in jedem einzelnen Summanden **derselbe Faktor** enthalten ist, kann er **ausgeklammert** werden. Dabei wird das Distributivgesetz rückwärts angewendet:

$$ab + ac = a(b + c).$$

Wird bei einem Term alles ausgeklammert, bleibt in der Klammer eine 1 zurück.

Beispiele:

a) $5ab - 3ac = a(5b - 3c)$

b) $8x^3y - 12x^2y^2 + 4x^2y = 4x^2y(2x - 3y + 1)$

c) $3(a + b) + 2(a + b)^2 = (a + b)(3 + 2(a + b)) = (a + b)(3 + 2a + 2b)$

d) $(a + 3)y + a + 3 = (a + 3)y + (a + 3) = (a + 3)(y + 1)$

e) $(9x + 8y)(a + b) - (5x + 4y)(a + b) = (a + b)((9x + 8y) - (5x + 4y))$
 $= (a + b)(9x + 8y - 5x - 4y) = (a + b)(4x + 4y) = (a + b) \cdot 4(x + y) = 4(a + b)(x + y)$

- **Spezialfall: Faktor -1 ausklammern**

Es kann manchmal helfen, einen Faktor -1 auszuklammern.

Beispiele:

a) $6(x - y) + 4(y - x) = 6(x - y) + 4 \cdot (-1)(x - y) = (x - y)(6 + 4 \cdot (-1))$
 $= (x - y)(6 - 4) = 2(x - y)$

b) $13x^2(2z + 3) - 2z - 3 = 13x^2(2z + 3) + (-1)(2z + 3) = (2z + 3)(13x^2 + (-1))$
 $= (2z + 3)(13x^2 - 1)$

- **Spezialfall: Ausklammern in Teilsommen**

Manchmal kann zwar **nicht aus allen Summanden** ausgeklammert werden, aber zum Beispiel aus den ersten beiden ein Faktor und aus den zweiten beiden ein (häufig: anderer) Faktor. Dies heisst **Ausklammern in Teilsommen**. Meistens kann dann in einem zweiten Schritt der jeweilige **Rest ausgeklammert** werden, so dass wirklich Faktoren entstehen.

Beispiele:

a) $a^2 + ab + ac + bc = a(a + b) + c(a + b) = (a + b)(a + c)$

b) $5x - 10y + 2bx - 4by = 5(x - 2y) + 2b(x - 2y) = (x - 2y)(5 + 2b)$

- **2. Schritt: Anwendung von binomischen Formeln**

Die binomischen Formeln können (rückwärts angewendet) zum Faktorisieren eingesetzt werden:

1. binomische Formel: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

2. binomische Formel: $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

3. binomische Formel: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Beispiele:

a) $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = (2x - 3y)^2$ (Überprüfen Sie stets, dass auch das Mittelglied korrekt ist!)

b) $121f^4 - w^2 = (11f^2)^2 - w^2 = (11f^2 - w)(11f^2 + w)$

c) $9a^2b^2 + 42abc + 49c^2 = (3ab)^2 + 2 \cdot 3ab \cdot 7c + (7c)^2 = (3ab + 7c)^2$

- **3. Schritt: Klammeransatz für Trinome (auch: In verschiedene Binome zerlegen)**

Beispiel: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$, denn Ausmultiplizieren zeigt, dass $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$

Allgemein gilt: Wenn sich ein quadratischer Term als $x^2 + (a + b)x + ab$ schreiben lässt, so kann er mit dem **Klammeransatz für Trinome** zu $(x + a)(x + b)$ faktorisiert werden. **In der Mitte** des Trinoms muss also die **Summe von a und b** stehen, **zuhinterst** das **Produkt von a und b**.

Beispiele:

a) $x^2 + 10x + 21 = (x + 7)(x + 3)$

b) $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$

c) $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$

d) $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$

- **Vermischte Beispiele, d.h. Anwendung mehrere Schritte bis zur Lösung:**

a) $36a^2b^2 - 144b^2c^2 \stackrel{\text{ausklammern}}{=} 36b^2(a^2 - 4c^2) \stackrel{3. \text{ bin. F.}}{=} 36b^2(a + 2c)(a - 2c)$

b) $12ax - 8bx + 12ay - 8by \stackrel{\text{ausklammern}}{=} 4(3ax - 2bx + 3ay - 2by)$
 $\stackrel{\text{ausklammern in Teilsummen}}{=} 4(x(3a - 2b) + y(3a - 2b)) = 4(3a - 2b)(x + y)$

c) $z^4 - 10\,000 \stackrel{3. \text{ bin. F.}}{=} (z^2 - 100)(z^2 + 100) \stackrel{3. \text{ bin. F. für erste Klammer}}{=} (z - 10)(z + 10)(z^2 + 100)$

d) $28r^2 + 28rs + 7s^2 \stackrel{\text{ausklammern}}{=} 7(4r^2 + 4rs + s^2) \stackrel{1. \text{ bin. F.}}{=} 7(2r + s)^2$

e) $2x^2 + 12x + 16 \stackrel{\text{ausklammern}}{=} 2(x^2 + 6x + 8) \stackrel{\text{Klammeransatz für Trinome}}{=} 2(x + 2)(x + 4)$

G) Aufgaben „Termumformungen 2“

5. Faktorisieren Sie so weit wie möglich. Schwerpunkt: Ausklammern

- | | | |
|--|--------------------------|-------------------------------|
| a) $mn + an$ | b) $x - ax - bx$ | c) $16rst - 24r^2s + 40rs^2t$ |
| d) $(x - 2)r - (x - 2)s$ | e) $m - 3 + 3a(3 - m)$ | f) $5a(3x - y) - 3x + y$ |
| g) $x^2 - ax + 5x - 5a$ | h) $6xz - 3x + 8az - 4a$ | i) $18mn^2 + 6mn - 12m^2n$ |
| j) $(3x + 4y)(a - b) + (2x + y)(a - b)$ | | |
| k) $4a^2x(2r - s) - 8a(2r - s) + 6x(2r - s)$ | | |
| l) $(m + 2n)(5a - 3b) + (2a - b)(m + 2n) - m - 2n$ | | |

6. Faktorisieren Sie so weit wie möglich. Schwerpunkte: Binomische Formeln und Klammeransatz für Trinome

- | | | |
|----------------------|-------------------------|--------------------------|
| a) $a^2 - b^2$ | b) $a^2 + b^2$ | c) $4a^2 + 4a + 1$ |
| d) $18x^2 + 12x + 2$ | e) $36a^2 + 132a + 121$ | f) $25y^2 - 20yz + 4z^2$ |
| g) $3x^2 - 12x + 12$ | h) $1 - u^2$ | i) $x^2 - 2x - 15$ |
| j) $3z^2 - 3$ | k) $5a^2x^2 - 45a^2$ | l) $a^3 - 4a^2b + 4ab^2$ |
| m) $x^2 + 4x - 21$ | n) $x^2 - x - 30$ | o) $x^2 + 3x + 2$ |

7. Faktorisieren Sie die folgenden vermischten Aufgaben so weit wie möglich.

- | | | |
|--|----------------------------|--------------------------|
| a) $625x^4 - 16b^4$ | b) $6x^2 + 3xy - 2ax - ay$ | c) $2x^4 - x^3 - 4x + 2$ |
| d) $5x^2 - 25x + 20$ | e) $27u^2 - 144u + 192$ | f) $8a^2 - 2b^2$ |
| g) $4x^2 - 10x + 25$ | | |
| h) $(3x^2 - 2xy)(8uv - 3) - (4uv - 1)(3x^3 - 2xy)$ | | |
| i) $(3m - 1)(2x^2 - y^2) + (3x^2 - 2y^2)(1 - 3m)$ | | |
| j) $15azm - 12anz + 4n - 5m$ | | |

H) Musterlösungen „Termumformungen 2“

5. a) $mn + an = n(m + a)$
 b) $x - ax - bx = x(1 - a - b)$
 c) $16rst - 24r^2s + 40rs^2t = 8rs(2t - 3r + 5st)$
 d) $(x - 2)r - (x - 2)s = (x - 2)(r - s)$
 e) $m - 3 + 3a(3 - m) = (m - 3) + 3a(-1)(m - 3) = (m - 3)(1 + 3a(-1))$
 $= (m - 3)(1 - 3a)$
 f) $5a(3x - y) - 3x + y = 5a(3x - y) - (3x - y) = (3x - y)(5a - 1)$
 g) $x^2 - ax + 5x - 5a = x(x - a) + 5(x - a) = (x - a)(x + 5)$
 h) $6xz - 3x + 8az - 4a = 3x(2z - 1) + 4a(2z - 1) = (2z - 1)(3x + 4a)$
 i) $18mn^2 + 6mn - 12m^2n = 6mn(3n + 1 - 2m)$
 j) $(3x + 4y)(a - b) + (2x + y)(a - b) = (a - b)((3x + 4y) + (2x + y)) = (a - b)(5x + 5y)$
 $= (a - b) \cdot 5(x + y) = 5(a - b)(x + y)$
 k) $4a^2x(2r - s) - 8a(2r - s) + 6x(2r - s) = (2r - s)(4a^2x - 8a + 6x)$
 $= (2r - s) \cdot 2(2a^2x - 4a + 3x) = 2(2r - s)(2a^2x - 4a + 3x)$
 l) $(m + 2n)(5a - 3b) + (2a - b)(m + 2n) - m - 2n$
 $= (m + 2n)(5a - 3b) + (2a - b)(m + 2n) - (m + 2n)$
 $= (m + 2n)((5a - 3b) + (2a - b) - 1) = (m + 2n)(7a - 4b - 1)$
6. a) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
 (3. bin. F.)
 b) $a^2 + b^2 = a^2 + b^2$ (kann nicht faktorisiert werden!)
 c) $4a^2 + 4a + 1 = (2a + 1)^2$
 (1. bin. F.)
 d) $18x^2 + 12x + 2 \stackrel{\text{ausklammern}}{=} 2(9x^2 + 6x + 1) \stackrel{1. \text{ bin. F.}}{=} 2(3x + 1)^2$
 e) $36a^2 + 132a + 121 = (6a + 11)^2$
 (1. bin. F.)
 f) $25y^2 - 20yz + 4z^2 = (5y - 2z)^2$
 (2. bin. F.)
 g) $3x^2 - 12x + 12 \stackrel{\text{ausklammern}}{=} 3(x^2 - 4x + 4) \stackrel{2. \text{ bin. F.}}{=} 3(x - 2)^2$
 h) $1 - u^2 = (1 + u)(1 - u)$
 (3. bin. F.)
 i) $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$
 (Klammeransatz für Trinome)
 j) $3z^2 - 3 \stackrel{\text{ausklammern}}{=} 3(z^2 - 1) \stackrel{3. \text{ bin. F.}}{=} 3(z - 1)(z + 1)$
 k) $5a^2x^2 - 45a^2 \stackrel{\text{ausklammern}}{=} 5a^2(x^2 - 9) \stackrel{3. \text{ bin. F.}}{=} 5a^2(x + 3)(x - 3)$
 l) $a^3 - 4a^2b + 4ab^2 \stackrel{\text{ausklammern}}{=} a(a^2 - 4ab + 4b^2) \stackrel{2. \text{ bin. F.}}{=} a(a - 2b)^2$
 m) $x^2 + 4x - 21 = (x + 7)(x - 3)$
 (Klammeransatz für Trinome)
 n) $x^2 - x - 30 = (x - 6)(x + 5)$
 (Klammeransatz für Trinome)
 o) $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$
 (Klammeransatz für Trinome)

7. a) $625x^4 - 16b^4 \stackrel{3. \text{ bin. F.}}{=} (25x^2 + 4b^2)(25x^2 - 4b^2) \stackrel{3. \text{ bin. F.}}{=} (25x^2 + 4b^2)(5x + 2b)(5x - 2b)$
- b) $6x^2 + 3xy - 2ax - ay \stackrel{\text{ausklammern in Teilsummen}}{=} 3x(2x + y) - a(2x + y)$
 $\stackrel{\text{ausklammern}}{=} (2x + y)(3x - a)$
- c) $2x^4 - x^3 - 4x + 2 \stackrel{\text{ausklammern in Teilsummen}}{=} x^3(2x - 1) - 2(2x - 1) \stackrel{\text{ausklammern}}{=} (2x - 1)(x^3 - 2)$
- d) $5x^2 - 25x + 20 \stackrel{\text{ausklammern}}{=} 5(x^2 - 5x + 4) \stackrel{\text{Klammerans. f. T.}}{=} 5(x - 4)(x - 1)$
- e) $27u^2 - 144u + 192 \stackrel{\text{ausklammern}}{=} 3(9u^2 - 48u + 64) \stackrel{2. \text{ bin. F.}}{=} 3(3u - 8)^2$
- f) $8a^2 - 2b^2 \stackrel{\text{ausklammern}}{=} 2(4a^2 - b^2) \stackrel{3. \text{ bin. F.}}{=} 2(2a + b)(2a - b)$
- g) $4x^2 - 10x + 25$ kann nicht faktorisiert werden. Die 2. binomische Formel $(2x - 5)^2$ würde zwar $4x^2 - 20x + 25$ liefern, das mittlere Glied stimmt aber nicht.
- h) $(3x^2 - 2xy)(8uv - 3) - (4uv - 1)(3x^3 - 2xy)$
 $\stackrel{\text{ausklammern}}{=} (3x^2 - 2xy)((8uv - 3) - (4uv - 1)) \stackrel{\text{ausklammern}}{=} x(3x - 2y)(4uv - 2)$
 $\stackrel{\text{ausklammern}}{=} x(3x - 2y) \cdot 2(2uv - 1) = 2x(3x - 2y)(2uv - 1)$
- i) $(3m - 1)(2x^2 - y^2) + (3x^2 - 2y^2)(1 - 3m)$
 $\stackrel{-1 \text{ ausklammern}}{=} (3m - 1)(2x^2 - y^2) + (3x^2 - 2y^2)(-1)(3m - 1)$
 $\stackrel{\text{ausklammern}}{=} (3m - 1)((2x^2 - y^2) + (3x^2 - 2y^2)(-1)) = (3m - 1)(-x^2 + y^2)$
 $\stackrel{3. \text{ bin. F.}}{=} (3m - 1)(y + x)(y - x)$
- j) $15azm - 12anz + 4n - 5m \stackrel{\text{ausklammern in Teilsummen}}{=} 3z(5m - 4n) + 4n - 5m$
 $\stackrel{-1 \text{ ausklammern}}{=} 3z(5m - 4n) + (-1)(5m - 4n) \stackrel{\text{ausklammern}}{=} (5m - 4n)(3z - 1)$