

Repetitionsaufgaben: Lineare Gleichungen

Zusammengestellt von Hannes Ernst, KSR

- Lernziele:**
- Lineare Gleichungen von Hand auflösen können.
 - Lineare Gleichungen mit Parametern nach einer Variablen auflösen können.
 - Einfache Textaufgaben, die auf lineare Gleichungen führen, lösen können.

A. Was ist eine lineare Gleichung?

Die Grundform einer linearen Gleichung lautet $ax = b$.

a, b und x sind dabei reelle Zahlen. Die Unbekannte x kommt nur in der ersten Potenz vor.

Beispiel 1: $4x = 15$

Beispiel 2: $7x - (4x - 5) = 29$ Termumformungen bringen die Gleichung auf die Grundform.

Beispiel 3: $(x - 5)^2 = x^2$ Diese Gleichung sieht quadratisch aus. Termumformungen lassen aber x^2 verschwinden, so dass die Gleichung linear wird.

B. Auflösen von linearen Gleichungen

Das Auflösen von linearen Gleichungen geschieht mit Äquivalenzumformungen. Das Ziel ist dabei, die Unbekannte (meistens x) zu isolieren.

Äquivalenzumformungen sind:

- (1) Termvereinfachungen
- (2) Beidseitige Addition oder Subtraktion der gleichen Zahl oder des gleichen Terms.
- (3) Beidseitige Multiplikation oder Division mit einer Zahl ungleich Null.

Beispiel 1

$4x = 15$ $| :4$ Dividieren Sie auf beiden Seiten der Gleichung durch 4.
 $x = 3,75$ x ist jetzt isoliert und die Lösung gefunden.
Angabe als Lösungsmenge: $L = \{ 3,75 \}$

Beispiel 2

$$7x - (4x - 5) = 29$$

$$7x - 4x + 5 = 29$$

$$3x + 5 = 29 \quad | -5$$

$$3x = 24 \quad | :3$$

$$x = 8$$

Klammern auflösen (Termumformung).

Termvereinfachung.

Auf beiden Seiten der Gleichung 5 subtrahieren → Grundform.

$$\underline{L = \{ 8 \}}$$

Beispiel 3

$$(x - 5)^2 = x^2$$

$$x^2 - 10x + 25 = x^2 \quad | -x^2$$

$$-10x + 25 = 0 \quad | +10x$$

$$25 = 10x \quad | :10$$

$$2,5 = x$$

Termumformung. Die passende binomische Formel anwenden.

→ Grundform.

$$\underline{L = \{ 2,5 \}}$$

Aufgaben

Als weniger intensives Übungsprogramm reicht es auch, jeweils nur die Aufgaben mit gerader Aufgabennummer zu lösen.

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf und geben Sie die Lösungsmenge an.

Die Lösungen sollen als ganze Zahl, als exakte Dezimalzahl oder als gekürzte Bruchzahl angegeben werden.

Aufgabe 1: $9x - 9 = x + 23$

Aufgabe 2: $7 - 5x = 7 + 2x$

Aufgabe 3: $25x - 16 - 9x = 20 + 24x - 10 - 10x$

Aufgabe 4: $13 + 4(6x - 5) = 5(5x + 2)$

Aufgabe 5: $x + 2(x + 3) = 3(x + 4)$

Aufgabe 6: $3(13x + 9) - 6(4x - 5) = 32$

Aufgabe 7: $4(5x - 6) - 7 = 4 - 5(6x - 7)$

Aufgabe 8: $67 - 2(3x + 13) = 29 - 3(2x - 4)$

Aufgabe 9: $x^2 + 17 = x(x - 11) - 49$

Aufgabe 10: $(2x - 3)^2 = (2x + 3)^2 + 48$

Aufgabe 11: $(2x + 3)(8x + 1) = (4x - 5)(4x + 5) + 2$

Aufgabe 12: $(x - 3)(2x - 5) + 4(2 - x) + 12 = 2(1 - x)^2$

C. Lineare Gleichungen mit Parametern

Oft enthält eine lineare Gleichung nebst der Unbekannten x , nach der sie aufgelöst werden soll, noch weitere unbekannte Größen, so genannte Parameter.

Beispiel 4

$$3(ax - 2) + x = ax - 4b$$

$$3ax - 6 + x = ax - 4b \quad | +6 - ax$$

$$3ax + x - ax = -4b + 6$$

$$2ax + x = 6 - 4b$$

$$x(2a + 1) = 6 - 4b \quad | : (2a+1)$$

$$x = \frac{6 - 4b}{2a + 1}$$

a und b sind Parameter. Die linke Seite ausmultiplizieren.

Alle Summanden, die ein x enthalten, müssen auf eine Seite des Gleichzeichens gebracht werden, alles andere kommt auf die andere Seite.

Vereinfachen.

Auf der linken Seite x ausklammern. \rightarrow Grundform.

x noch vollständig isolieren.

Anmerkung: Diese Lösung gilt nur, falls $a \neq -0,5$ ist. Falls $a = -0,5$ ist, wird der Nenner $2a+1 = 0$ und die obige Lösung gilt nicht. Eine Fallunterscheidung liefert (ohne Erklärung):

1) ∞ viele Lösungen x für $a=-0,5$ und $b=1,5$ **2)** keine Lösung x für $a=-0,5$ und $b \neq 1,5$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf.

Fallunterscheidungen für die Parameter müssen nicht vorgenommen werden.

Aufgabe 13: $ax + 7 = 12 - bx$

Aufgabe 14: $14b + a(x - 3b) = x(7 - a) + ab$

Aufgabe 15: $2(ax - bx) = x - 2bx + c$

Aufgabe 16: $p(q - x) + q(r - x) - q(p - x) = 0$

Aufgabe 17: $(x + n)^2 = (x - n)^2 + 10n$

Aufgabe 18: $(x - 4a)^2 - x(x + b) = b(7x + 16b)$

D. Textaufgaben

Beispiel 5

Addiert man zum Neunfachen einer Zahl die Differenz aus 28 und dem Dreifachen der Zahl, so erhält man gleich viel, wie wenn man 60 um das Doppelte der Zahl vermindert.

x deklarieren: x ist die gesuchte Zahl

Eine Gleichung aufstellen: $9x + (28 - 3x) = 60 - 2x$

Die Gleichung auflösen:

$$\begin{aligned} 9x + 28 - 3x &= 60 - 2x \\ 6x + 28 &= 60 - 2x \\ 8x &= 32 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Antwortsatz: Die gesuchte Zahl ist 4.

Lösen Sie folgende Textaufgaben unter Verwendung einer linearen Gleichung.

Vergessen Sie nicht, die Variable zu deklarieren und einen Antwortsatz zu formulieren.

- Aufgabe 19: Addiert man 13 zum Sechsfachen einer Zahl, so ergibt sich dasselbe, wie wenn man das Elffache dieser Zahl um 2 vermindert. Welche Zahl ist es?
- Aufgabe 20: Die Summe aus dem Doppelten einer Zahl und 11 ist um 6 grösser als die Zahl selbst. Welche Zahl ist es?
- Aufgabe 21: Eine Mutter ist heute doppelt so alt wie ihre Tochter. Vor 10 Jahren war sie dreimal so alt wie diese. Wie alt sind die beiden heute?
- Aufgabe 22: Ein Dreieck hat einen Umfang von 90 cm. Ferner ist eine Seite halb so lang wie eine andere und um 6 cm länger als die dritte. Bestimmen Sie die Seitenlängen.
- Aufgabe 23: Bei einer Treppe mit 22 Stufen könnten 2 Stufen eingespart werden, wenn jede Stufe um 1,6 cm erhöht würde. Wie hoch ist eine Stufe bzw. die ganze Treppe?
- Aufgabe 24: Ein Kapital ist zu 4% angelegt und bringt jährlich 300 Franken mehr Zins ein als ein anderes um 6000 Franken kleineres Kapital mit einem Zinsfuß von $3\frac{1}{2}\%$. Wie gross sind die beiden Kapitalien?
- Aufgabe 25: Ein Kapital von 28'000 Franken bringt einen um 150 Franken höheren Jahreszins als ein Kapital von 30'000 Franken, bei dem der Zinsfuß um $\frac{3}{4}\%$ niedriger ist als beim ersten Kapital. Berechnen Sie die beiden Zinsfüsse.

E. Lösungen

Aufgabe 1 $9x - 9 = x + 23 \Rightarrow 8x = 32 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \underline{L = \{4\}}$

Aufgabe 2 $7 - 5x = 7 + 2x \Rightarrow 0 = 7x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \underline{L = \{0\}}$

Aufgabe 3 $25x - 16 - 9x = 20 + 24x - 10 - 10x \Rightarrow 16x - 16 = 10 + 14x$
 $\Rightarrow 2x = 26 \Rightarrow x = 13 \Rightarrow \underline{L = \{13\}}$

Aufgabe 4 $13 + 4(6x - 5) = 5(5x + 2) \Rightarrow 13 + 24x - 20 = 25x + 10$
 $\Rightarrow -17 = x \Rightarrow \underline{L = \{-17\}}$

Aufgabe 5 $x + 2(x + 3) = 3(x + 4) \Rightarrow x + 2x + 6 = 3x + 12$
 $\Rightarrow 0x = 6 \Rightarrow 0 = 6$ (dies ist keine gültige Aussage) $\Rightarrow \underline{L = \{\}}$

Aufgabe 6 $3(13x + 9) - 6(4x - 5) = 32 \Rightarrow 39x + 27 - 24x + 30 = 32$
 $\Rightarrow 15x = -25 \Rightarrow x = -\frac{25}{15} = -\frac{5}{3} \Rightarrow \underline{L = \{-\frac{5}{3}\}}$

Aufgabe 7 $4(5x - 6) - 7 = 4 - 5(6x - 7) \Rightarrow 20x - 24 - 7 = 4 - 30x + 35$
 $\Rightarrow 50x = 70 \Rightarrow x = 1,4 \Rightarrow \underline{L = \{1,4\}}$

Aufgabe 8 $67 - 2(3x + 13) = 29 - 3(2x - 4) \Rightarrow 67 - 6x - 26 = 29 - 6x + 12$
 $\Rightarrow 41 = 41 \Rightarrow 0 = 0$ (dies ist eine allgemeingültige Aussage, jeder Wert x erfüllt die Gleichung) $\Rightarrow \underline{L = \mathbb{R}}$ Lösungsmenge ist die vorgegebene Grundmenge.

Aufgabe 9 $x^2 + 17 = x(x - 11) - 49 \Rightarrow x^2 + 17 = x^2 - 11x - 49$
 $\Rightarrow 11x = -66 \Rightarrow x = -6 \Rightarrow \underline{L = \{-6\}}$

Aufgabe 10 $(2x - 3)^2 = (2x + 3)^2 + 48 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 4x^2 + 12x + 9 + 48$
 $\Rightarrow -48 = 24x \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \underline{L = \{-2\}}$

Aufgabe 11 $(2x + 3)(8x + 1) = (4x - 5)(4x + 5) + 2 \Rightarrow 16x^2 + 2x + 24x + 3 = 16x^2 - 25 + 2$
 $\Rightarrow 26x = -26 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \underline{L = \{-1\}}$

Aufgabe 12 $(x - 3)(2x - 5) + 4(2 - x) + 12 = 2(1 - x)^2$
 $\Rightarrow 2x^2 - 5x - 6x + 15 + 8 - 4x + 12 = 2(1 - 2x + x^2)$
 $\Rightarrow 2x^2 - 15x + 35 = 2 - 4x + 2x^2 \Rightarrow 33 = 11x \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \underline{L = \{3\}}$

Lösungen der Parameternaufgaben

Aufgabe 13 $ax + 7 = 12 - bx \Rightarrow ax + bx = 5 \Rightarrow x(a + b) = 5 \Rightarrow \underline{x = \frac{5}{a+b}}$

Aufgabe 14 $14b + a(x - 3b) = x(7 - a) + ab \Rightarrow 14b + ax - 3ab = 7x - ax + ab$
 $\Rightarrow 2ax - 7x = 4ab - 14b \Rightarrow x(2a - 7) = 2b(2a - 7) \quad | : (2a - 7)$
 $\Rightarrow \underline{x = 2b}$

Aufgabe 15 $2(ax - bx) = x - 2bx + c \Rightarrow 2ax - 2bx = x - 2bx + c$
 $\Rightarrow 2ax - x = c \Rightarrow x(2a - 1) = c \Rightarrow \underline{x = \frac{c}{2a-1}}$

Aufgabe 16 $p(q - x) + q(r - x) - q(p - x) = 0 \Rightarrow pq - px + qr - qx - pq + qx = 0$
 $\Rightarrow qr = px \Rightarrow \underline{x = \frac{qr}{p}}$

Aufgabe 17 $(x + n)^2 = (x - n)^2 + 10n \Rightarrow x^2 + 2nx + n^2 = x^2 - 2nx + n^2 + 10n$
 $\Rightarrow 4nx = 10n \Rightarrow x = \frac{10n}{4n} \quad (\text{kürzen!}) \Rightarrow \underline{x = 2,5}$

Aufgabe 18 $(x - 4a)^2 - x(x + b) = b(7x + 16b) \Rightarrow x^2 - 8ax + 16a^2 - x^2 - bx = 7bx + 16b^2$
 $\Rightarrow -8ax - 8bx = -16a^2 + 16b^2 \quad | : (-8) \Rightarrow ax + bx = 2a^2 - 2b^2$
 $\Rightarrow \text{ausklammern} \Rightarrow x(a + b) = 2(a + b)(a - b) \Rightarrow \underline{x = 2a - 2b}$

Lösungen der Textaufgaben

Aufgabe 19 x deklarieren: x ist die gesuchte Zahl
 Gleichung: $6x + 13 = 11x - 2$
 Gleichung lösen: $15 = 5x \Rightarrow x = 3$
 Antwortsatz: Die gesuchte Zahl ist 3

Aufgabe 20 x deklarieren: x ist die gesuchte Zahl
 Gleichung: $2x + 11 = x + 6$
 Gleichung lösen: $x = -5$
 Antwortsatz: Die gesuchte Zahl ist -5

Aufgabe 21 x deklarieren: x ist das heutige Alter der Tochter

Tabelle:	heute	vor 10 Jahren
Alter der Tochter in Jahren	x	x - 10
Alter der Mutter in Jahren	2x	2x - 10

Gleichung: $2x - 10 = 3(x - 10)$
 Gleichung lösen: $2x - 10 = 3x - 30 \Rightarrow 20 = x$
 Antwortsatz: Die Tochter ist heute 20 Jahre und die Mutter 40 Jahre alt.

Aufgabe 22 x deklarieren: x ist die Länge der zweitgrössten Seite (in cm)
 Gleichung: $x + 2x + (x - 6) = 90$
 Gleichung lösen: $4x - 6 = 90 \Rightarrow x = 24$
 Antwortsatz: Die Seiten sind 18 cm, 24 cm und 48 cm lang.

Aufgabe 23 x deklarieren: x ist die Höhe einer Treppenstufe (in cm)
 Gleichung: $22x = 20(x + 1,6)$
 Gleichung lösen: $22x = 20x + 32 \Rightarrow x = 16$
 Antwortsatz: Eine Stufe ist 16 cm und die ganze Treppe ist 3,52 m hoch.

Aufgabe 24 x deklarieren: x ist das erste Kapital (in Fr.), das zweite Kapital ist $x - 6000$
 Verwende die Formel $\text{Jahreszins} = \frac{\text{Kapital} \cdot \text{Zinsfuss}}{100}$
 Gleichung: $\frac{x \cdot 4}{100} - 300 = \frac{(x - 6000) \cdot 3,5}{100} \quad | \cdot 100$
 Gleichung lösen: $4x - 30'000 = 3,5x - 21'000$
 $0,5x = 9'000 \Rightarrow x = 18'000$
 Antwortsatz: Das erste Kapital ist 18'000 Franken und das zweite ist 2'000 Franken gross.

Aufgabe 25 x deklarieren: x ist der Zinsfuss des ersten Kapitals.
 Gleichung: $\frac{28'000 \cdot x}{100} - 150 = \frac{30'000 \cdot (x - 0,75)}{100} \quad | \text{ kürzen}$
 Gleichung lösen: $280x - 150 = 300x - 225$
 $75 = 20x \Rightarrow x = 3,75$
 Antwortsatz: Die beiden Zinsfüsse betragen $3\frac{3}{4}\%$ bzw. 3% .