KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonale Fachschaft Mathematik

Repetitionsaufgaben: Quadratische Funktionen

Zusammengestellt von Felix Huber, KSR

Lernziele:

- Sie wissen, dass der Graph einer quadratischen Funktion eine Parabel ist und können diese ausgehend von der Scheitelform schnell von Hand zeichnen.
- Sie können eine in der allgemeinen Form dargestellte quadratische Funktion durch quadratisches Ergänzen in die Scheitelform bringen.
- Sie können die Nullstellen des Graphen einer quadratischen Funktion bestimmen.
- Sie können die Schnittpunkte des Graphen einer quadratischen Funktion mit dem Graphen einer linearen Funktion oder dem Graphen einer anderen quadratischen Funktion bestimmen. Sie verstehen dabei den Zusammenhang zwischen der Anzahl Lösungen der quadratischen Gleichung und der Anzahl und der Art der gemeinsamen Punkte (2 Schnittpunkte, 1 Berührpunkt, kein gemeinsamer Punkt).
- Sie können mit den notwendigen Angaben die Gleichung einer quadratischen Funktion bestimmen. Sie verwenden dabei den geeigneten Ansatz (allgemeine Form, Scheitelform oder Linearfaktorzerlegung).
- Sie können von einem gegebenen Punkt aus die Gleichungen der Tangenten an den Graphen einer gegebenen quadratischen Funktion bestimmen.
- Sie können Extremwertaufgaben lösen, deren Zielfunktion eine quadratische Funktion ist.

Normalparabel

Eine Funktion der Form

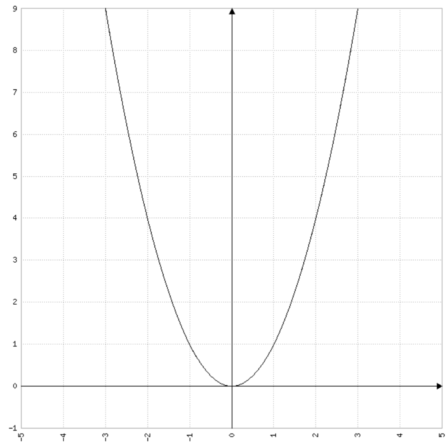
$y = a\,x^2 + b\,x + c$ *(allgemeine Form)*

ist eine quadratische Funktion. Ihr Graph wird als (quadratische) Parabel bezeichnet.

Für a = 1 und b = c = 0 erhalten wir die Funktion

$y = x^2.$

Ihr Graph ist die sogenannte *Normalparabel*:



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Der Scheitelpunkt S hat die Koordinaten (0/0).

Scheitelform

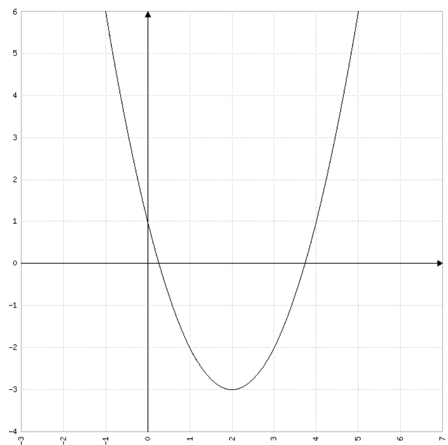
Um Parabeln schnell zeichnen zu können, eignet sich die sogenannte *Scheitelform*:

$y = a\,(x - u)^2 + v$

Der Scheitelpunkt S hat die Koordinaten (u/v). a ist der Streckungs-/Stauchungsparameter.

Wenn a = 1 ist, ist die Normalparabel lediglich verschoben:

Beispiel 1:
$y = (x - 2)^2 - 3$
$\Rightarrow\; S = (2/-3)$
Beachten Sie die Vorzeichen!



<u>Von diesem Scheitelpunkt aus</u> wird die Normalparabel gezeichnet:

Δx	-3	-2	-1	0	1	2	3
Δy	9	4	1	0	1	4	9

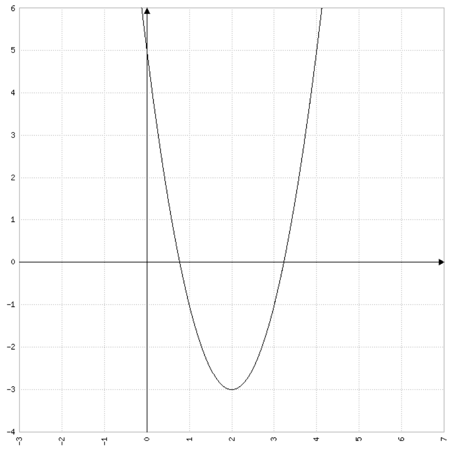
Wenn a ≠ 1 ist, werden zusätzlich die Werte von Δy mit a multipliziert:

Beispiel 2:

$$y = 2(x-2)^2 - 3$$

$$\Rightarrow S = (2/-3)$$

Δx	-3	-2	-1	0	1	2	3
Δy	18	8	2	0	2	8	18

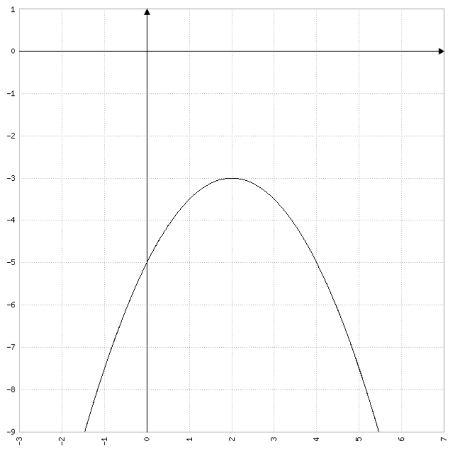


Beispiel 3:

$$y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 - 3$$

$$\Rightarrow S = (2/-3)$$

Δx	-3	-2	-1	0	1	2	3
Δy	-4.5	-2	-0.5	0	-0.5	-2	-4.5



Zeichnen Sie die Graphen der folgenden quadratischen Funktionen.

Aufgabe 1: $y = (x+1)^2 + 2$

Aufgabe 2: $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + 2$

Aufgabe 3: $y = -2(x+1)^2 + 2$

Quadratisch ergänzen

Um von der allgemeinen Form auf die Scheitelform zu kommen, muss man quadratisch ergänzen. Dabei wird die erste bzw. die zweite Binomische Formel benötigt:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \qquad \Big| \; - b^2$$

$$\boxed{a^2 + 2ab = (a + b)^2 - b^2}$$

bzw.

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \qquad \Big| \; - b^2$$

$$\boxed{a^2 - 2ab = (a - b)^2 - b^2}$$

Beispiel 4:

$$y = 2x^2 - 12x + 19$$

1. Schritt: Parameter a aus dem quadratischen und dem linearen Glied ausklammern:

$$y = 2\left[x^2 - 6x \right] + 19$$

2. Schritt: Der Inhalt der eckigen Klammer soll wie oben beschrieben mit Hilfe der Binomischen Formeln quadratisch ergänzt werden:

x ist dabei immer a und der Faktor vor dem x ist immer das Doppelte von b:

„quadrieren“

$$x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$$

„halbieren“

Zur Kontrolle können Sie die rechte Seite wieder ausmultiplizieren:

$$(x - 3)^2 - 9 = x^2 - 6x + 9 - 9 = x^2 - 6x$$

3. Schritt: Einsetzen, die eckige Klammer ausmultiplizieren, zusammenfassen:

$$y = 2\left[(x - 3)^2 - 9 \right] + 19$$

$$y = 2(x - 3)^2 - 18 + 19$$

$$y = 2(x - 3)^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad S(3/1)$$

Beispiel 5:

$$y = \frac{1}{2} x^2 + 2x - 3$$

1. Schritt: Parameter a aus dem quadratischen und dem linearen Glied ausklammern:

$$y = \frac{1}{2} \left[x^2 + 4x \right] - 3$$

2. Schritt: Quadratisch ergänzen:

„quadrieren“

$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$$

„halbieren“

3. Schritt: Einsetzen, die eckige Klammer ausmultiplizieren, zusammenfassen:

$$y = \frac{1}{2} \left[(x + 2)^2 - 4 \right] - 3$$
$$y = \frac{1}{2} (x + 2)^2 - 2 - 3$$
$$y = \frac{1}{2} (x + 2)^2 - 5 \quad \Rightarrow \quad S(-2/-5)$$

Von der Scheitelform kommt man natürlich jederzeit durch ausmultiplizieren wieder auf die allgemeine Form.

Stellen Sie die folgenden quadratischen Funktionen in den Aufgaben 4 bis 7 in der Scheitelform dar und bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts.

Aufgabe 4: $y = 2x^2 + 8x - 1$

Aufgabe 5: $y = -\frac{1}{2} x^2 + 6x - 7$

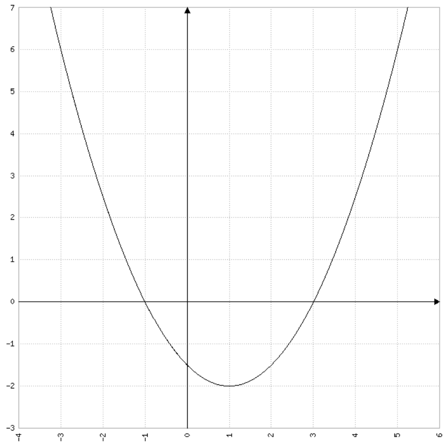
Aufgabe 6: $y = 3x^2 - 4x + 2$

Aufgabe 7: $y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x + \frac{1}{6}$

Nullstellen

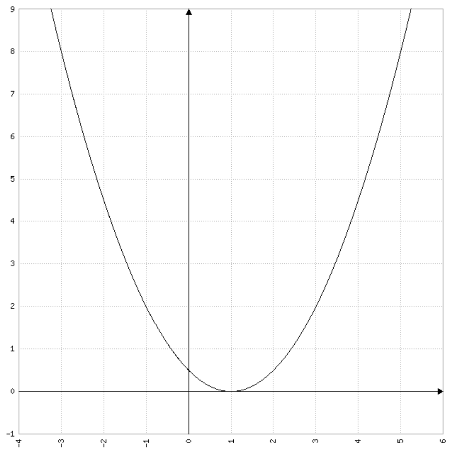
Nullstellen sind die Schnittstellen eines Graphen mit der x-Achse. Auf der x-Achse ist y = 0.

Beispiel 6: Nullstellen von $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$



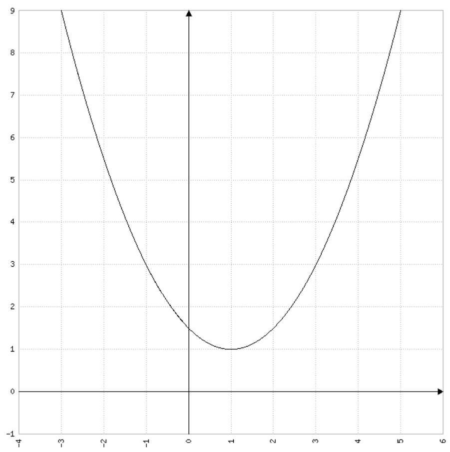
$$y = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$
$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$
$$\Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 3$$
$$\Rightarrow \text{Diskriminante} > 0 \Rightarrow \text{2 Lösungen}$$

Beispiel 7: Nullstellen von $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$



$$y = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$
$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm 0}{2}$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$
$$\Rightarrow \text{Diskriminante} = 0 \Rightarrow \text{1 Lösung}$$

Beispiel 8: Nullstellen von $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$



$$y = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$$
$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$
$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$
$$\Rightarrow \text{Diskriminante} < 0 \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

Der Graph einer quadratischen Funktion hat also zwei, eine oder keine Nullstellen.

.

Berechnen Sie in den Aufgaben 8 bis 10 die Nullstellen der quadratischen Funktionen.

Aufgabe 8: $y = -2x^2 - 4x$

Aufgabe 9: $y = -2x^2 - 4x - 2$

Aufgabe 10: $y = -2x^2 - 4x - 3$

Linearfaktorzerlegung

Hat eine Parabel Nullstellen, so kann der Funktionsterm in Linearfaktoren zerlegt werden:

Beispiel 9: Linearfaktorzerlegung von $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ (vgl. Beispiel 6)

1. Faktor vor x^2 ausklammern:

   $y = \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x - 3\right)$

2. Klammerinhalt faktorisieren:

   $y = \frac{1}{2}\left(x + 1\right)\left(x - 3\right)$

Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass man sofort die Nullstellen ablesen kann:
y ist = 0, wenn der Inhalt der ersten Klammer = 0 ist oder wenn der Inhalt der zweiten Klammer = 0 ist. Der Inhalt der ersten Klammer ist = 0, wenn x = -1 ist, der Inhalt der zweiten Klammer ist = 0, wenn x = 3 ist. $\Rightarrow \quad x_1 = -1, \; x_2 = 3$

Allgemein: $y = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$

a ist der Streckungs-/Stauchungsparameter, x_1 und x_2 sind die Nullstellen.

Aufgabe 11: Zerlegen Sie $y = 2x^2 + 6x - 20$ in Linearfaktoren und lesen Sie dann die Nullstellen ab.

Bestimmung der Funktionsgleichung

Wir haben nun drei Darstellungsformen für quadratische Funktionen zur Verfügung: Die allgemeine Form, die Scheitelform und die Linearfaktorzerlegung. Soll die Funktionsgleichung bestimmt werden, entscheidet man deshalb zuerst, welche Darstellung als Ansatz geeignet ist:

Scheitelpunkt ist gegeben	$\Rightarrow$	Scheitelform
Nullstellen sind gegeben	$\Rightarrow$	Linearfaktorzerlegung
Sonst	$\Rightarrow$	allgemeine Form

Beispiel 10: Eine Parabel hat den Scheitelpunkt S (2/4) und geht durch den Punkt P (-1/7). Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

S ist gegeben $\Rightarrow$ Ansatz = Scheitelform: $y = a\left(x-u\right)^2 + v$

$S\left(2/4\right) \Rightarrow u = 2,\ v = 4 \Rightarrow y = a\left(x-2\right)^2 + 4$

$P\left(-1/7\right)$ liegt auf der Parabel, d.h. seine Koordinaten müssen die Funktionsgleichung erfüllen:

$$7 = a\left(-1-2\right)^2 + 4 \Rightarrow 7 = 9a + 4 \Rightarrow 3 = 9a \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}\left(x-2\right)^2 + 4$$

Beispiel 11: Eine Parabel hat die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$ und geht durch den Punkt P (7/5). Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Nullstellen sind gegeben $\Rightarrow$ Ansatz = Linearfaktorzerlegung: $y = a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$

$x_1 = 2,\ x_2 = 4 \Rightarrow y = a\left(x-2\right)\left(x-4\right)$

$P\left(7/5\right)$ einsetzen:

$$5 = a\left(7-2\right)\left(7-4\right) \Rightarrow 5 = 15a \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}\left(x-2\right)\left(x-4\right)$$

Beispiel 12: Eine Parabel geht durch die Punkte P (1/-1), Q (2/4) und R (4/8). Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Ansatz = allgemeine Form: $y = ax^2 + bx + c$

Punkte einsetzen:

$P\left(1/-1\right) \Rightarrow$ I: $-1 = a + b + c$

$Q\left(2/4\right) \Rightarrow$ II: $4 = 4a + 2b + c$

$R\left(4/8\right) \Rightarrow$ III: $8 = 16a + 4b + c$

3 x 3 – Gleichungssystem auflösen :

II – I $\Rightarrow$ IV: $5 = 3a + b$

III – I $\Rightarrow$ V: $9 = 15a + 3b$

$V - 3 \cdot IV \Rightarrow -6 = 6a \Rightarrow a = -1$, in IV: $\Rightarrow b = 8$, in I: $\Rightarrow c = -8$

$y = -x^2 + 8x - 8$

Bestimmen Sie in den Aufgaben 12 bis 14 die Funktionsgleichungen.

Aufgabe 12: Eine Parabel hat die Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ und geht durch den Punkt P (-1/-3).

Aufgabe 13: Eine Parabel hat den Scheitelpunkt S (-2/3) und geht durch den Punkt P (0/2).

Aufgabe 14: Eine Parabel geht durch die Punkte P (-3/-3), Q (0/3) und R (3/0).

Schnittpunkte

Schnittpunkte von Graphen bestimmt man, indem man die Funktionsterme gleichsetzt.

Beispiel 13: Schnittpunkte von p: $y = -2x^2 + 8x - 7$ und g: $y = -x + 2$.

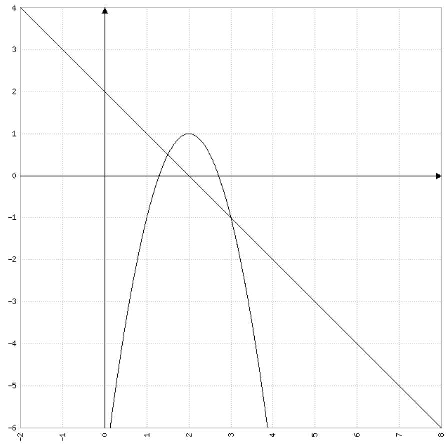
$$-2x^2 + 8x - 7 = -x + 2 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 9 = 0$$

Eine quadratische Gleichung kann zwei, eine oder keine Lösung haben.
Diskriminante > 0 ⇒ 2 Lösungen ⇒ 2 Schnittpunkte
Diskriminante = 0 ⇒ 1 Lösung ⇒ 1 Berührpunkt
Diskriminante < 0 ⇒ keine Lösung ⇒ Kein gemeinsamer Punkt

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm 3}{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3, \; x_2 = \frac{3}{2}$$

Hier gibt es zwei Lösungen, d.h. die Gerade g schneidet die Parabel p in den Punkten
$P(3/-1)$ und $Q\left(\frac{3}{2}/\frac{1}{2}\right)$.



Bestimmen Sie in den Aufgaben 15 bis 18 die Schnittpunkte.

Aufgabe 15: $p: y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{2}$, $g: y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Aufgabe 16: $p: y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{2}$, $g: y = 2x - 7$

Aufgabe 17: $p: y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{2}$, $g: y = x - 5$

Aufgabe 18: $p: y = x^2 - 6x - 3$, $q: y = -x^2 + 5$

Tangenten

Beispiel 14: Vom Punkt (2/6) aus sollen Tangenten an den Graphen von $y = -x^2 + 1$ gelegt werden. Bestimmen Sie die Tangentengleichungen.

Eine Tangente ist eine Gerade $\Rightarrow$ Ansatz: $t:\ y = mx + q$

Im Folgenden müssen also die Parameter m und q bestimmt werden.

1. $P(2/6)$ liegt auf t $\Rightarrow$ Die Koordinaten von P müssen also die Funktionsgleichung erfüllen $\Rightarrow$ $6 = m \cdot 2 + q$ $\Rightarrow$ $q = 6 - 2m$

   Jetzt kann q im Ansatz durch $6 - 2m$ ersetzt werden $\Rightarrow$ $t:\ y = mx + 6 - 2m$

2. Wir setzen die Funktionsterme von p und t gleich:

   $-x^2 + 1 = mx + 6 - 2m \Rightarrow x^2 + mx + 5 - 2m = 0$

   Damit t tatsächlich Tangente an p ist, muss diese Gleichung genau 1 Lösung haben.

   Wir müssen m also so festlegen, dass die Diskriminante = 0 wird:

   $D = 0$

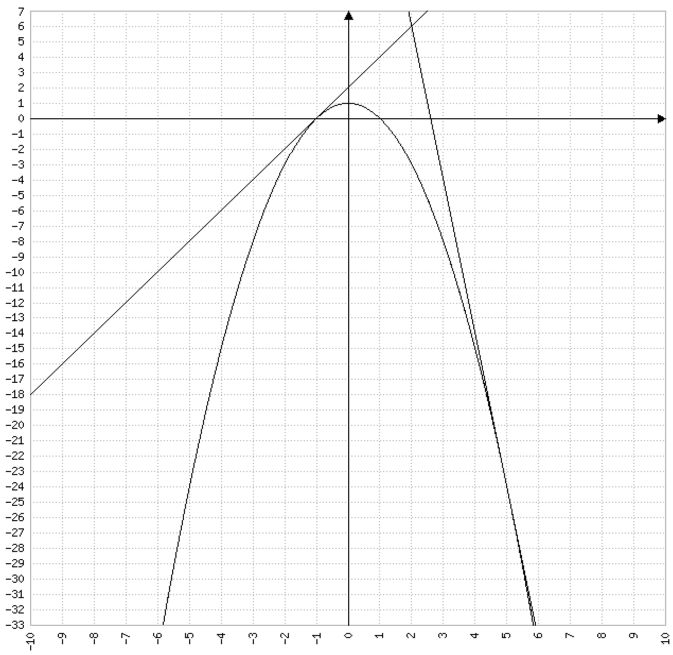
   $b^2 - 4ac = 0$

   $m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5 - 2m) = 0$

   $m^2 + 8m - 20 = 0 \Rightarrow (m-2)(m+10) = 0$

   $\Rightarrow m_1 = 2 \Rightarrow q_1 = 6 - 2 \cdot 2 = 2 \Rightarrow t_1:\ y = 2x + 2$

   $\Rightarrow m_2 = -10 \Rightarrow q_2 = 6 - 2 \cdot (-10) = 26 \Rightarrow t_2:\ y = -10x + 26$



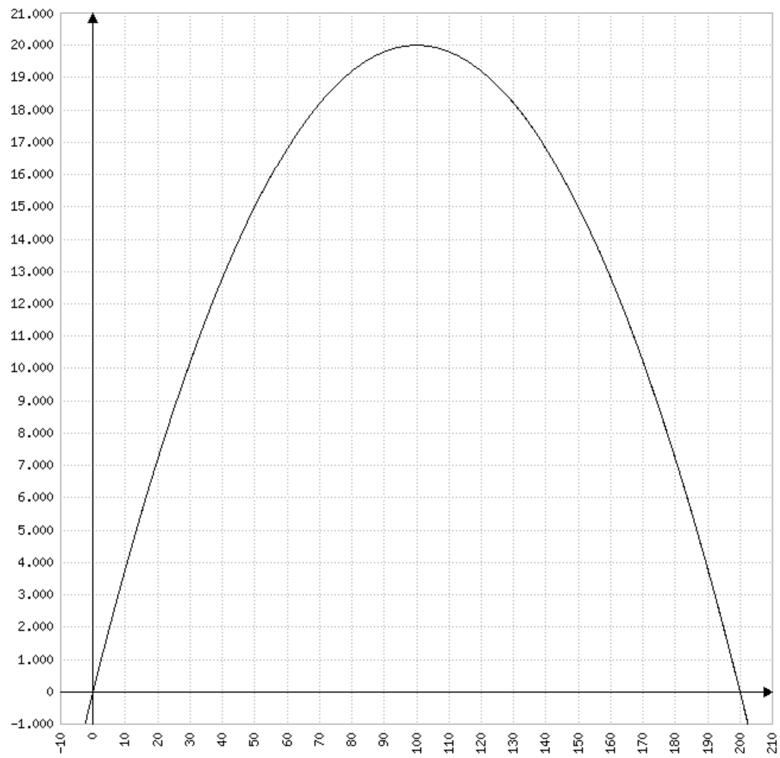
Aufgabe 19: Vom Punkt (1/-6) aus sollen Tangenten an den Graphen von $y = x^2 + 2$ gelegt werden. Bestimmen Sie die Tangentengleichungen.

Extremwertprobleme

Beispiel 15: Ein 400 m langer Zaun soll einen rechteckigen Platz, der an eine Mauer grenzt, auf drei Seiten begrenzen.
Welchen Flächeninhalt kann der Platz maximal haben?

Das Vorgehen bei Extremwertaufgaben ist immer gleich:

1. Hauptbedingung: Das ist immer eine Gleichung für die zu maximierende (oder für die zu minimierende) Grösse.
   Hier: A soll maximal sein $\Rightarrow$ $A = l\,b$ (l: Länge ; b: Breite)
2. Nebenbedingung: A soll nur von einer Variablen abhängen, deshalb muss die eine Variable durch die andere ausgedrückt werden.
   Hier: $400 = l + 2\,b \Rightarrow l = 400 - 2\,b$
3. Zielfunktion: Die Nebenbedingung wird dazu in die Hauptbedingung eingesetzt:
   Hier: $A = (400 - 2\,b)\,b \Rightarrow A = -2\,b^2 + 400\,b$
   Das ist nun eine quadratische Funktion, einfach mit b statt x und mit A statt y.
   Wenn den Graphen zeichnen, sehen wir sofort, wo das Maximum liegt:



Das Maximum liegt natürlich im Scheitelpunkt: bei b = 100 m ist A = 20000 m^2.

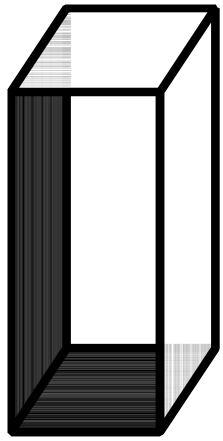
4. Scheitelpunkt: Um den Scheitelpunkt zu berechnen, muss die Zielfunktion durch quadratisches Ergänzen in die Scheitelform gebracht werden.

   Hier: $A = -2b^2 + 400b \;\Rightarrow\; A = -2\left[b^2 - 200b\right] \;\Rightarrow\; A = -2\left[(b-100)^2 - 10000\right]$

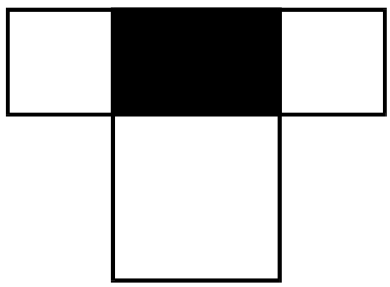
   $\Rightarrow\; A = -2(b-100)^2 + 20000 \;\Rightarrow\; S(100/20000)$

5. Lösung: Die Fläche kann maximal den Inhalt $20000\ m^2$ haben. Dazu muss für die Breite $b = 100$ m und für die Länge $l = 400 - 2 \cdot 100 = 200$ m gewählt werden.

Aufgabe 20: Die Summe aller Kanten einer quadratischen Säule (Quader mit quadratischer Grundfläche) misst 96 cm. Berechnen Sie die Kanten so, dass die Mantelfläche maximal wird. (Mantelfläche: Vier Seitenflächen)



Aufgabe 21: Gegeben ist ein Rechteck mit einem Umfang von 24 Metern. Bei den beiden Breiten wird seitlich nach aussen ein Quadrat so angehängt, dass eine Seite des Quadrates und die Breite übereinstimmen. Ebenso wird die Länge mit einem Quadrat seitlich ergänzt. Dies allerdings nur bei einer der beiden Längen.



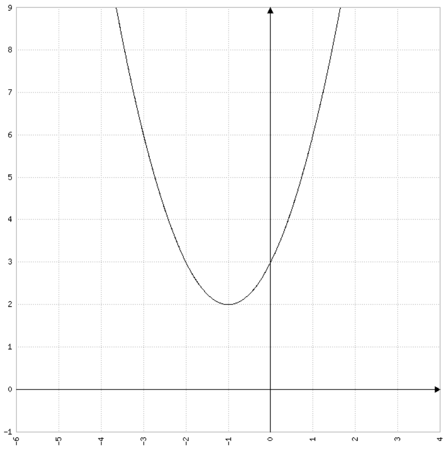
Berechnen Sie den *minimalen Flächeninhalt der ganzen Figur*, die aus drei Quadraten und dem Rechteck besteht.

Lösungen

Aufgabe 1

$$y = (x+1)^2 + 2$$
$$\Rightarrow \; S = (-1/2)$$

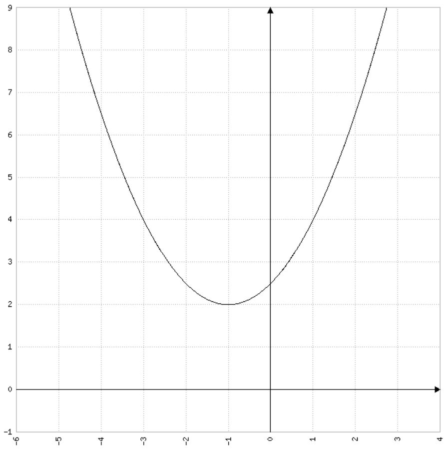
Δx	-3	-2	-1	0	1	2	3
Δy	9	4	1	0	1	4	9



Aufgabe 2

$$y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + 2$$
$$\Rightarrow \; S = (-1/2)$$

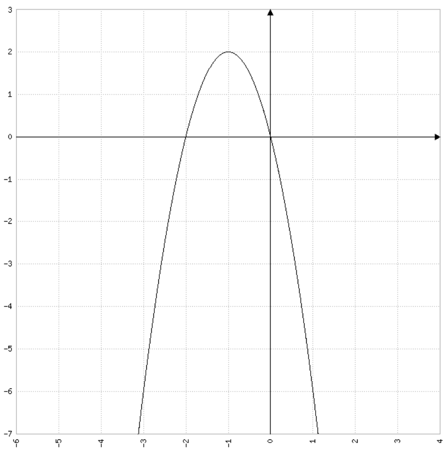
Δx	-3	-2	-1	0	1	2	3
Δy	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5



Aufgabe 3

$$y = -2(x+1)^2 + 2$$
$$\Rightarrow \; S = (-1/2)$$

Δx	-3	-2	-1	0	1	2	3
Δy	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18



Aufgabe 4

$$y = 2x^2 + 8x - 1$$

1. $y = 2\left[x^2 + 4x\right] - 1$

2. $x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$

3. $y = 2\left[(x+2)^2 - 4\right] - 1$

   $y = 2(x+2)^2 - 8 - 1$

   $y = 2(x+2)^2 - 9 \quad \Rightarrow \quad S(-2/-9)$

Aufgabe 5

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 7$$

1. $y = -\frac{1}{2}\left[x^2 - 12x\right] - 7$

2. $x^2 - 12x = (x-6)^2 - 36$

3. $y = -\frac{1}{2}\left[(x-6)^2 - 36\right] - 7$

   $y = -\frac{1}{2}(x-6)^2 + 18 - 7$

   $y = -\frac{1}{2}(x-6)^2 + 11 \quad \Rightarrow \quad S(6/11)$

Aufgabe 6

$$y = 3x^2 - 4x + 2$$

1. $y = 3\left[x^2 - \frac{4}{3}x\right] + 2$

2. $x^2 - \frac{4}{3}x = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}$

3. $y = 3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right] + 2$

   $y = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} + 2$

   $y = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad S\left(\frac{2}{3}/\frac{2}{3}\right)$

Aufgabe 7

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$$

1. $y = \frac{1}{2}\left[x^2 - \frac{2}{3}x\right] + \frac{1}{6}$

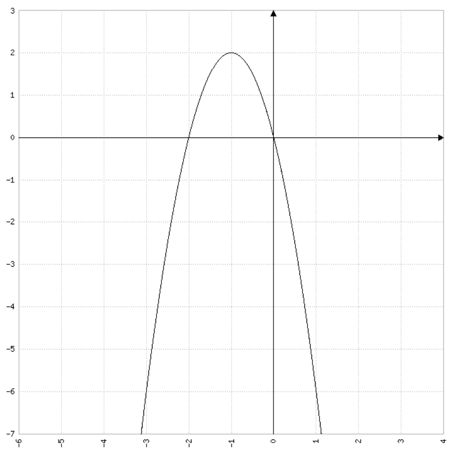
2. $x^2 - \frac{2}{3}x = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}$

3. $y = \frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] + \frac{1}{6}$

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{18} + \frac{1}{6}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9} \Rightarrow S\left(\frac{1}{3}/\frac{1}{9}\right)$$

Aufgabe 8



$y = 0 \Rightarrow -2x^2 - 4x = 0 \quad \big| :(-2)$

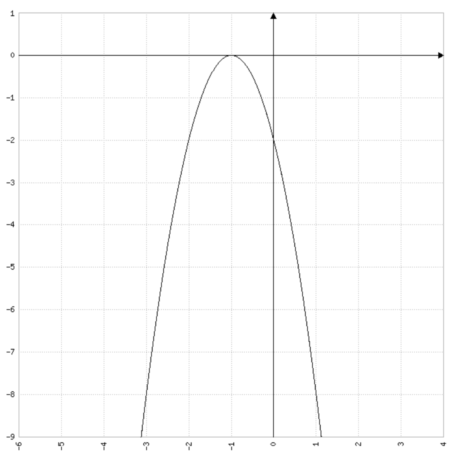
$\Rightarrow \quad x^2 + 2x = 0$

$\Rightarrow$ Lösen geht am einfachsten durch Faktorisieren:

$\Rightarrow \quad x(x+2) = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = -2,\ x_2 = 0$

Aufgabe 9



$y = 0 \Rightarrow -2x^2 - 4x - 2 = 0 \quad \big| :(-2)$

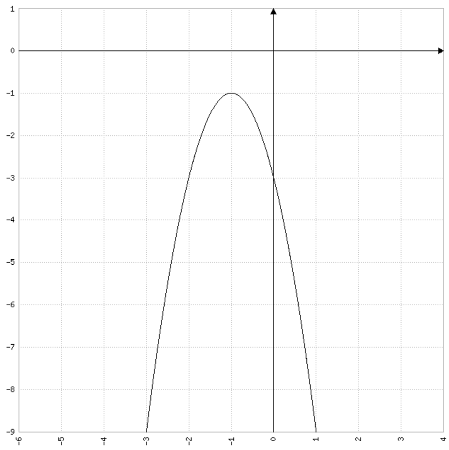
$\Rightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm 0}{2}$

$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = -1$

Aufgabe 10



$$y = 0 \Rightarrow -2x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{-4}$$

$$\Rightarrow \text{Diskriminante} < 0 \Rightarrow \text{Keine Lösung}$$

Aufgabe 11

$$y = 2x^2 + 6x - 20 \Rightarrow y = 2\left(x^2 + 3x - 10\right) \Rightarrow y = 2(x+5)(x-2)$$

$$\Rightarrow x_1 = -5, \; x_1 = 2$$

Aufgabe 12

Ansatz = Linearfaktorzerlegung: $y = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$

$x_1 = -2, x_2 = 3 \Rightarrow y = a(x+2)(x-3)$

$P(-1/-3)$ einsetzen:

$$-3 = a(-1+2)(-1-3) \Rightarrow -3 = -4a \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4}(x+2)(x-3)$$

Aufgabe 13

Ansatz = Scheitelform: $y = a(x-u)^2 + v$

$S(-2/3) \Rightarrow u = -2, \; v = 3 \Rightarrow y = a(x+2)^2 + 3$

$P(0/2)$ einsetzen:

$$2 = a(0+2)^2 + 3 \Rightarrow 2 = 4a + 3 \Rightarrow -1 = 4a \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 3$$

Aufgabe 14

Ansatz = allgemeine Form: $y = a\,x^2 + b\,x + c$

Punkte einsetzen:

$P\,(-3/-3) \;\Rightarrow\; \text{I}:\; -3 = 9\,a - 3\,b + c$

$Q\,(0/3) \;\Rightarrow\; \text{II}:\; 3 = c$

$R\,(3/0) \;\Rightarrow\; \text{III}:\; 0 = 9\,a + 3\,b + c$

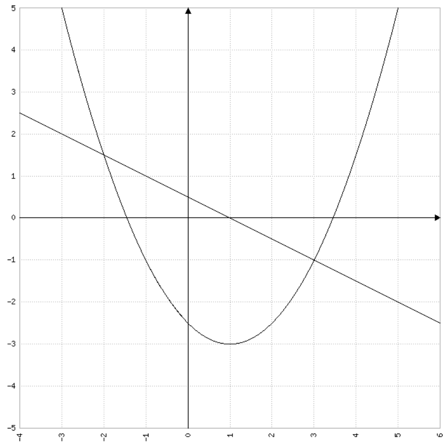
3 x 3 – Gleichungssystem auflösen :

$\text{III} - \text{I} \;\Rightarrow\; \text{IV}:\; 3 = 6\,b \;\Rightarrow\; b = \frac{1}{2}$

II und IV in III: $\Rightarrow\; a = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$

Aufgabe 15



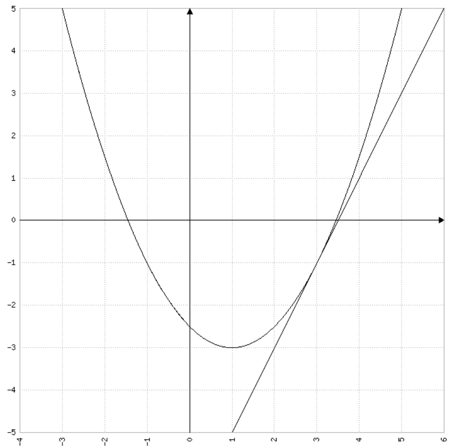
$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x^2 - x - 6 = 0$

$\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2}$

$\Rightarrow\; x_1 = 3\,,\; x_2 = -2$

$\Rightarrow$ Schnittpunkte $P\,(3/-1)$ und $Q\left(-2/\frac{3}{2}\right)$

Aufgabe 16



$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{2} = 2\,x - 7 \;\Rightarrow\; x^2 - 6\,x + 9 = 0$

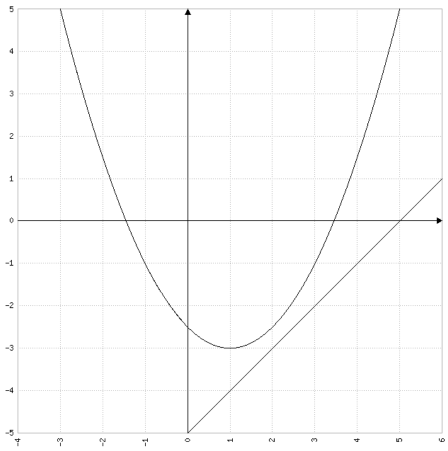
$\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 0}{2}$

$\Rightarrow\; x_1 = x_2 = 3$

$\Rightarrow$ Berührpunkt $B\,(3/-1)$

$\Rightarrow$ g ist Tangente an p.

Aufgabe 17



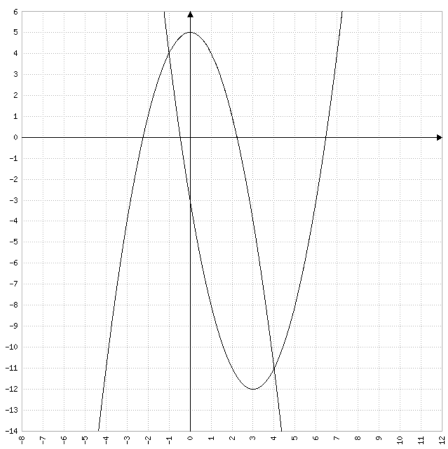
$$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{2} = x - 5 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$\Rightarrow$ Diskriminante $< 0 \Rightarrow$ Keine Lösung

$\Rightarrow$ Keine gemeinsamen Punkte

Aufgabe 18



$$x^2 - 6x - 3 = -x^2 + 5$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$\Rightarrow$ $x_1 = 4$, $x_2 = -1$

$\Rightarrow$ Schnittpunkte P $(4/-11)$ und Q $(-1/4)$

Aufgabe 19

Ansatz: $t: y = m x + q$

1. $P(1/-6)$ in t einsetzen $\Rightarrow -6 = m \cdot 1 + q \Rightarrow q = -6 - m$

   $\Rightarrow t: y = m x - 6 - m$

2. $x^2 + 2 = m x - 6 - m \Rightarrow x^2 - m x + 8 + m = 0$

   $D = 0$

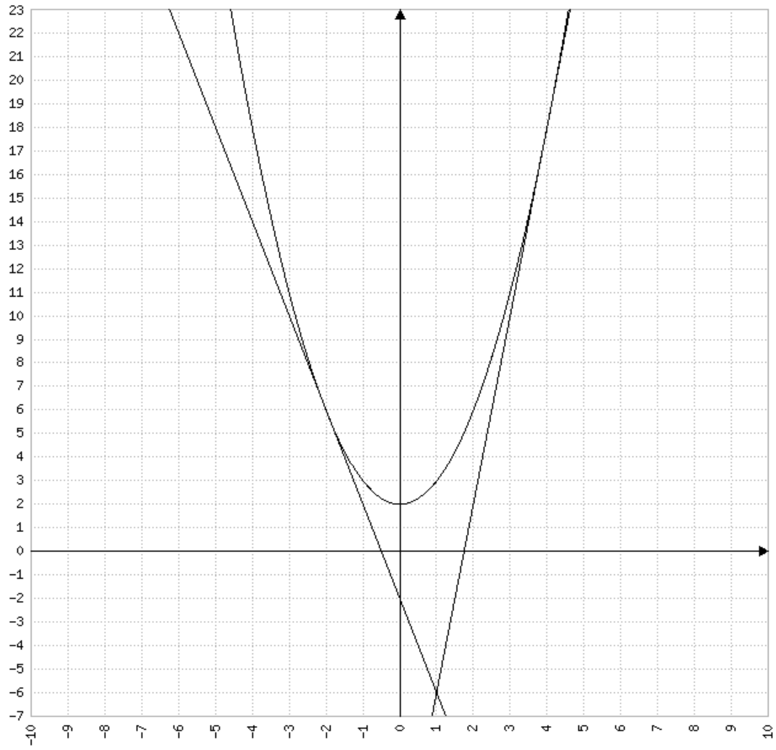
   $b^2 - 4 a c = 0$

   $(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (8 + m) = 0$

   $m^2 - 4 m + 32 = 0 \Rightarrow (m - 8)(m + 4) = 0$

   $\Rightarrow m_1 = 8 \Rightarrow q_1 = -6 - 8 = -14 \Rightarrow t_1: y = 8 x - 14$

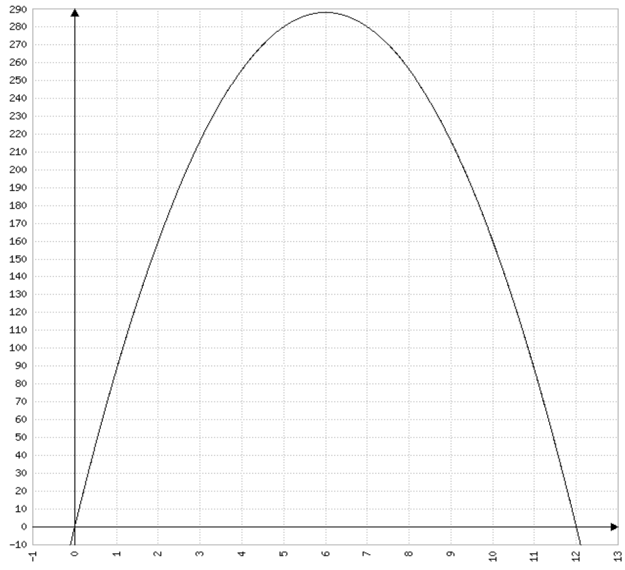
   $\Rightarrow m_2 = -4 \Rightarrow q_2 = -6 - (-4) = -2 \Rightarrow t_2: y = -4 x - 2$



Aufgabe 20

1. Hauptbedingung: $A = 4 a b$ (a: Grundkante ; b: Seitenkante)
2. Nebenbedingung: $96 = 8 a + 4 b \Rightarrow b = 24 - 2 a$
3. Zielfunktion: $A = 4 a (24 - 2 a) \Rightarrow A = -8 a^2 + 96 a$
4. Scheitelpunkt: $A = -8 \left[a^2 - 12 a \right] \Rightarrow A = -8 \left[(a - 6)^2 - 36 \right]$

   $\Rightarrow A = -8 (a - 6)^2 + 288 \Rightarrow S(6/288)$
5. Lösung: Die Mantelfläche kann maximal den Inhalt 288 cm^2 haben. Dazu muss für die Grundkante a = 6 cm und für die Seitenkante $b = 24 - 2 \cdot 6 = 12$ cm gewählt werden.

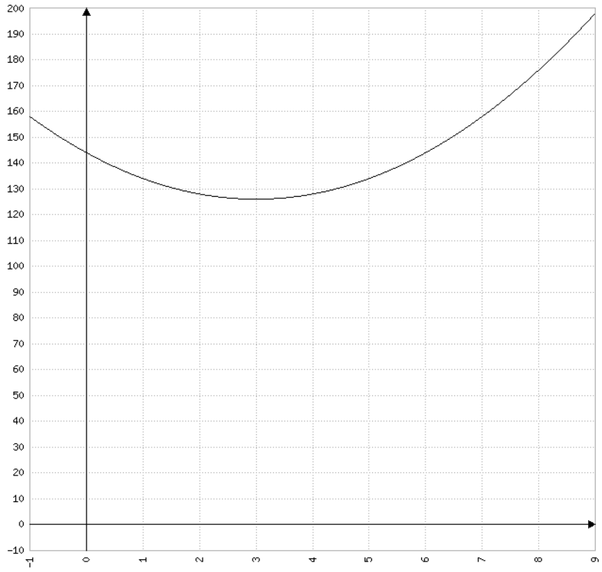


Aufgabe 21

1. Hauptbedingung: $A = 2b^2 + lb + l^2$ (l: Länge ; b: Breite)
2. Nebenbedingung: $24 = 2l + 2b \Rightarrow l = 12 - b$
3. Zielfunktion: $A = 2b^2 + (12 - b)\,b + (12 - b)^2$

   $\Rightarrow A = 2b^2 + 12b - b^2 + 144 - 24b + b^2 \Rightarrow A = 2b^2 - 12b + 144$

   Der Graph der Zielfunktion ist nun nach oben geöffnet. Deshalb findet man im Scheitelpunkt den minimalen Flächeninhalt:



4. Scheitelpunkt: $A = 2\left[b^2 - 6b\right] + 144 \Rightarrow A = 2\left[(b-3)^2 - 9\right] + 144$

   $\Rightarrow A = 2(b-3)^2 - 18 + 144 \Rightarrow A = 2(b-3)^2 + 126 \Rightarrow S(3/126)$
5. Lösung: Bei der Breite $b = 3$ m und der Länge $l = 12 - 3 = 9$ m hat die ganze Figur den minimalen Flächeninhalt von $A = 126\ m^2$.