KANTON
LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonale Fachschaft Mathematik

Repetitionsaufgaben
Textaufgaben zu Potenz-, Exponential- und Logarithmusgleichungen

Inhaltsverzeichnis

A) Vorbemerkungen

Zu Beginn werden sehr einfache Aufgaben gestellt. Sie dienen dazu, die schwierigeren Aufgaben besser zu verstehen.
Wichtig ist, dass Sie Zwischenresultate immer abspeichern und mit den abgespeicherten Werten dann weiterrechnen. Sonst kann es zu sehr grossen Abweichungen kommen!

B) Lernziele

- Angewandte Aufgaben in denen Potenz-, Exponential- und Logarithmusgleichungen vorkommen verstehen und lösen können
- Die Definition des Logarithmus anwenden können
- Zusammenhang zwischen dem Faktor q und dem Prozentsatz kennen
- Den Faktor für verschiedene Zeitintervalle angeben können

C) Repetition

$A(n)$	Eine Grösse, die von *n* abhängt z.B. Bevölkerungszahl, Kapital zum Zeitpunkt n.
$A(0)$	Wert der Grösse *A* zum Zeitpunkt *n* = 0 z.B. Anfangskapital.
n	Zeit
p	Prozentsatz

Wachstum/Zunahme $$A(n) = A(0)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = A(0)\cdot q^n \qquad q>1$$

Zerfall/Abnahme $$A(n) = A(0)\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)^n = A(0)\cdot q^n \qquad 0<q<1$$

Zusammenhang *p* und *q*/Beispiele

p	q (Faktor pro Zeiteinheit)	Bemerkungen
5% Zunahme pro Tag	1.05	q pro Stunde wäre also $\sqrt[24]{1.05}\approx 1.002$ d.h. 0,2% Zunahme pro Stunde. q pro Monat wäre also $1.05^{30}\approx 4.32$ d.h. 332% Zunahme pro Monat.
2% Abnahme pro Tag	0.98 Man gibt immer an was bleibt! D.h. 98% sind noch vorhanden.	q pro Stunde wäre also $\sqrt[24]{0.98}\approx 0.9992$ d.h. 0.08% Abnahme pro Stunde. q pro Monat wäre also $0.98^{30}\approx 0.5455$ d.h. 45.45% Abnahme pro Monat.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
A(0)																								

$q_{neu} = \sqrt[24]{1.05}$

q = 1.05

D) Aufgaben

1. Ein See enthält heute 200 Tonnen Algen. Ihre Menge nimmt jedes Jahr um 8 % zu.
   a) Wie viele Tonnen Algen enthält der See nach einem Jahr?
   b) Notieren Sie eine allgemeingültige Formel zu Aufgabe (1a). $A_0 =$ Algenmenge heute, $A_1 =$ Algenmenge nach einem Jahr, p = prozentuale Zunahme pro Jahr.
   c) Wie viele Tonnen enthält der See nach 2 Jahren?
   d) Notieren Sie eine allgemeingültige Formel für die Algenmenge A_n nach n Jahren.
   e) Wie viele Tonnen Algen enthält der See nach 12 Jahren?
   f) Wie viele Tonnen Algen enthielt der See vor 12 Jahren?
   g) Nach welcher Zeit enthält der See 400 Tonnen Algen?

2. Um wie viele Prozent nimmt die Algenmenge in einem See pro Jahr zu, wenn sie innert 12 Jahren von 200 Tonnen auf 400 Tonnen angewachsen ist?

3. Ein See enthält heute 200 Tonnen Algen. Ihre Menge nimmt jedes Jahr um 8 % ab.
   a) Wie viele Tonnen Algen enthält der See nach einem Jahr noch?
   b) Wie viele Tonnen Algen enthält der See nach 12 Jahren noch?
   c) Wie viele Tonnen Algen enthielt der See vor 12 Jahren?
   d) Vor welcher Zeit enthielt der See 400 Tonnen Algen?

4. Um wie viele Prozent nimmt die Algenmenge in einem See pro Jahr ab, wenn sie innert 12 Jahren von 400 Tonnen auf 200 Tonnen gesunken ist?

5. Ein Kapital ist bei einem festen Zinsfuss innert 20 Jahren von 8'000 Franken auf 18'391 Franken angestiegen. Wie gross war der Zinsfuss?

6. Nach Ihrer Rückkehr aus fünftägigen Ferien stellen Sie fest, dass Ihr Biotop dreimal so viele Algen enthält wie bei Ihrer Abreise. Sie nehmen an, die Algen vermehrten sich von Tag zu Tag um gleich viele Prozent. Wie gross ist dieser Prozentsatz?

7. Bei einer bestimmten radioaktiven Substanz verringert sich die Zahl der Kerne pro Tag um 9.71 % durch radioaktiven Zerfall. Heute besitzt ein Kernforschungszentrum 2.6 g dieser Substanz.
   a) Wie viel besass es vor 30 Tagen?
   b) Wie gross ist die Halbwertszeit? (Halbwertszeit = Zeit, in der sich die Zahl der Kerne halbiert)
   c) Um wie viele Prozent verringert sich die Zahl der Kerne pro Stunde?

8. In einem überdüngten tropischen See nimmt die Zahl der Algen pro Tag um 3 % zu. Heute enthält er 27 Tonnen.
   a) Wie viele Tonnen waren es vor 100 Tagen?
   b) Innert welcher Zeit verdoppelt sich die Algenzahl?

9. Um wie viele Prozent müsste die Zahl der radioaktiven Kerne einer Substanz pro Jahr abnehmen, wenn ihre Zahl in 50 Jahren 1 Billion (10^{12}) Mal kleiner sein soll als heute?

10. In einem See wuchs die Algenmenge innert 100 Tagen von 8 Tonnen auf heute 31 Tonnen. Nach wie vielen Tagen (von heute an gerechnet) sind es 200 Tonnen?

E) Musterlösungen

1. a) Algenmenge heute $= A_0 = 200\text{Tonnen}$,
   Zunahme der Algenmenge während des ersten Jahres in Tonnen $= Z$
   Pro Jahr Zunahme um 8 % $\Leftrightarrow \frac{Z}{200} = \frac{8}{100}$, $\Leftrightarrow \; Z = \frac{8}{100} \bullet 200$
   Algenmenge nach einem Jahr = A_1
   = Algenmenge heute + Zunahme der Algenmenge während des ersten Jahres
   $$A_1 = A_0 + Z = 200 + \frac{8}{100} \bullet 200 = (1+\frac{8}{100}) \bullet 200 = 1.08 \bullet 200 = \underline{\underline{216\text{ Tonnen}}}$$
   Die Algenmenge beträgt nach einem Jahr 216 Tonnen.

   b) $A_1 = (1+\frac{p}{100}) \bullet A_0$

   c) $A_2 = (1+\frac{p}{100}) \bullet A_1 = (1+\frac{p}{100}) \bullet (1+\frac{p}{100}) \bullet A_0 = (1+\frac{p}{100})^2 \bullet A_0$
   $= 1.08^2 \bullet 200 = \underline{\underline{233.28\text{ Tonnen}}}$
   Die Algenmenge beträgt nach zwei Jahren 233.28 Tonnen.

   d) $A_n = (1+\frac{p}{100})^n \bullet A_0$

   e) $A_{12} = 1.08^{12} \bullet 200 = \underline{\underline{503.63\text{ Tonnen}}}$
   Die Algenmenge beträgt nach zwölf Jahren 503.63 Tonnen.

   f) $A_0 = 200 = 1.08^{12} \bullet A_{-12} \quad \Big| :1.08^{12}$
   $\Leftrightarrow \; A_{-12} = \frac{200}{1.08^{12}} = \frac{1}{1.08^{12}} \bullet 200 = 1.08^{-12} \bullet 200 = \underline{\underline{79.42\text{ Tonnen}}}$
   Die Algenmenge betrug vor zwölf Jahren 79.42 Tonnen.
   <u>Feststellung</u>: Um die Algenmenge A_{-n} vor n Jahren zu berechnen, können wir also die Anzahl Jahre n in die unter (1d) gewonnene Formel als negative Zahl einsetzen.

   g) $400 = 1.08^n \bullet 200 \quad \Big| :200 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 1.08^n \quad \Leftrightarrow \quad 10^{\lg 2} = (10^{\lg 1.08})^n = 10^{\lg 1.08 \bullet n}$
   $\Leftrightarrow \; \lg 2 = \lg 1.08 \bullet n \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{\lg 2}{\lg 1.08} = \underline{\underline{9.0065\text{ Jahre}}}$

Nach 9.0065 Jahren beträgt die Algenmenge 400 Tonnen.

2. $400 = (1+\frac{p}{100})^{12} \bullet 200 \;\Big|\; :200 \;\Leftrightarrow\; 2 = (1+\frac{p}{100})^{12} \;\Leftrightarrow\; 1+\frac{p}{100} = \sqrt[12]{2} = 1.05946 \;\Big|\; -1$

$\Leftrightarrow\; \frac{p}{100} = 0.05946 \;\Big|\; \bullet 100 \;\Leftrightarrow\; p = \underline{\underline{5.946}}$. Die Algenmenge nimmt jährlich um 5.946 % zu.

3. Entsprechend den Überlegungen zu Aufgabe 1 erhält man:

a) $A_1 = (1-\frac{8}{100}) \bullet 200 = 0.92 \bullet 200 = \underline{\underline{184 \text{ Tonnen}}}$

Nach einem Jahr enthält der See noch 184 Tonnen Algen.

b) $A_{12} = 0.92^{12} \bullet 200 = \underline{\underline{73.53 \text{ Tonnen}}}$

Nach zwölf Jahren enthält der See noch 73.53 Tonnen Algen.

c) $A_{-12} = 0.92^{-12} \bullet 200 = \underline{\underline{543.97 \text{ Tonnen}}}$

Vor zwölf Jahren enthielt der See 543.97 Tonnen Algen.

d) $200 = 0.92^{n} \bullet 400 \;\Big|\; :400 \;\Leftrightarrow\; 0.5 = 0.92^{n} \;\Leftrightarrow\; \lg 0.5 = \lg 0.92 \bullet n$

$\Leftrightarrow\; n = \frac{\lg 0.5}{\lg 0.92} = \underline{\underline{8.3130 \text{ Jahre}}}$

Vor 8.3130 Jahren enthielt der See 400 Tonnen Algen.

4. $200 = (1-\frac{p}{100})^{12} \bullet 400 \;\Big|\; :400 \;\Leftrightarrow\; 0.5 = (1-\frac{p}{100})^{12}$

$\Leftrightarrow\; 1-\frac{p}{100} = \sqrt[12]{0.5} = 0.94387 \;\Big|\; +\frac{p}{100} - 0.94387$

$\Leftrightarrow\; \frac{p}{100} = 0.05613 \;\Big|\; \bullet 100 \;\Leftrightarrow\; p = \underline{\underline{5.613}}$. Die Algenmenge nimmt jährlich um 5.613 % ab.

5. $18'391 = (1+\frac{p}{100})^{20} \bullet 8'000 \;\Big|\; :8'000 \;\Leftrightarrow\; 1+\frac{p}{100} = \sqrt[20]{\frac{18'391}{8'000}} = 1.04250 \;\Big|\; -1$

$\Leftrightarrow\; \frac{p}{100} = 0.04250 \;\Big|\; \bullet 100 \;\Leftrightarrow\; p = \underline{\underline{4.250}}$. Der Zinsfuss betrug $4\,{}^{1}\!/_{4}\,\%$.

6. $3 \bullet A_0 = (1+\frac{p}{100})^{5} \bullet A_0 \;\Big|\; :A_0 \;\Leftrightarrow\; 3 = (1+\frac{p}{100})^{5} \;\Leftrightarrow\; 1+\frac{p}{100} = \sqrt[5]{3} \approx 1.2457 \;\Big|\; -1$

$\Leftrightarrow\; \frac{p}{100} \approx 0.2457 \;\Big|\; \bullet 100 \;\Leftrightarrow\; p \approx \underline{\underline{24.57}}$.

Die Algen vermehren sich pro Tag um 24.57 %.

7. a) $2.6 = (1-0.0971)^{30} \bullet x \mid :(1-0.0971)^{30} \Leftrightarrow x = \dfrac{2.6}{(1-0.0971)^{30}} = \underline{\underline{55.69\text{ g}}}$

Vor 30 Tagen waren es 55.69 g.

b) $0.5 \bullet K_0 = 0.9029^n \bullet K_0 \mid :K_0$, K_0 = Anzahl Kerne heute

$\Leftrightarrow 0.5 = 0.9029^n \Leftrightarrow 10^{\lg 0.5} = 10^{\lg 0.9029 \bullet n} \Leftrightarrow \lg 0.5 = \lg 0.9029 \bullet n \mid :\lg 0.9029$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{\lg 0.5}{\lg 0.9029} = \underline{\underline{6.786\text{ Tage}}}$. Die Halbwertszeit beträgt 6.786 Tage.

c) Anzahl Kerne nach 1 Stunde = $K_{1h} = 0.9029^{1/24} \bullet K_0 = 0.995753 \bullet K_0$

$\Leftrightarrow 0.995753 = 1 - \dfrac{p}{100}$ (wie bei Aufgabe 3a) $\Leftrightarrow p = \underline{\underline{0.4247\,\%}}$

Die Zahl der Kerne verringert sich pro Stunde um 0.4247 %.

Beachten Sie: $0.4247\,\% \neq \dfrac{9.71\%}{24} = 0.4046\,\%$

8. a) $27 = 1.03^{100} \bullet x \mid :1.03^{100} \Leftrightarrow x = \dfrac{27}{1.03^{100}} = \underline{\underline{1.4049\text{ Tonnen}}}$

Vor 100 Tagen waren es 1.4049 Tonnen

b) $2 \bullet A_0 = 1.03^n \bullet A_0 \Leftrightarrow 2 = 1.03^n \Leftrightarrow 10^{\lg 2} = 10^{\lg 1.03 \bullet n} \Leftrightarrow \lg 2 = \lg 1.03 \bullet n$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{\lg 2}{\lg 1.03} = \underline{\underline{23.45\text{ Tage}}}$.

Die Zahl der Algen verdoppelt sich jeweils innert 23.45 Tagen.

9. $10^{-12} \bullet K_0 = (1 - \dfrac{p}{100})^{50} \bullet K_0 \Leftrightarrow 10^{-12} = (1 - \dfrac{p}{100})^{50}$

$\Leftrightarrow 1 - \dfrac{p}{100} = \sqrt[50]{10^{-12}} = 10^{-12/50} = 10^{-0.24} = 0.57544 \Leftrightarrow p = \underline{\underline{42.456\,\%}}$

Die Zahl der radioaktiven Kerne müsste pro Jahr um 42.456 % abnehmen.

10. $31 = x^{100} \bullet 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[100]{31/8} = 1.013638$

$200 = 1.013638^n \bullet 31 \Leftrightarrow \dfrac{200}{31} = 1.013638^n$

$\Leftrightarrow 10^{\lg(200/31)} = 10^{(\lg 1.013638) \bullet n} \Leftrightarrow \lg(200/31) = (\lg 1.013638) \bullet n$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{\lg(200/31)}{\lg 1.013638} = \underline{\underline{137.6\text{ Tage}}}$

Von heute an in 137.6 Tagen beträgt die Algenmenge 200 Tonnen.